

Západočeská univerzita, fakulta aplikovaných věd  
katedra kybernetiky

---

# **Nový přístup k robustnímu návrhu průmyslových regulátorů**

Habilitační práce

Miloš Schlegel

Plzeň, únor, 2000

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Přípravná kapitola</b>	<b>9</b>
2.1	Seznam označení . . . . .	9
2.2	Vlastnosti přenosu . . . . .	10
2.3	Pojmy spojené s komplexní rovinou . . . . .	10
2.4	Řešení rovnic . . . . .	11
2.5	Metoda geometrického místa kořenů . . . . .	12
2.6	Michajlovovo kritérium stability . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Co potřebujeme znát pro návrh PI regulátoru</b>	<b>14</b>
3.1	Úvod . . . . .	14
3.2	Formulace návrhové úlohy . . . . .	15
3.3	Robustnost návrhu . . . . .	19
3.4	Řešení M-úlohy pro $M = 1$ a PI regulátor . . . . .	22
3.5	Řešení M-úlohy pro $M > 1$ a PI regulátor . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Úloha robustního návrhu regulátoru</b>	<b>30</b>
4.1	Úvod . . . . .	30
4.2	Formulace problému . . . . .	31
4.3	Zjednodušení úlohy RNR . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Množinový model: frekvenční oblast</b>	<b>37</b>
5.1	Úvod . . . . .	37
5.2	Základní pojmy a označení . . . . .	38
5.3	Jednobodový model . . . . .	40
5.4	Dvoubodový model: případ $\omega_1 = 0$ . . . . .	44
5.5	Dvoubodový model: případ $\omega_1 > 0$ . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Extremální polynomy</b>	<b>55</b>
6.1	Formulace problému . . . . .	55
6.2	Pomocná tvrzení . . . . .	56
6.3	Nutná podmínka pro extrémální polynomy . . . . .	61
6.4	Jednobodová interpolace . . . . .	63
6.5	Dvoubodová interpolace: případ $\omega_1 = 0$ . . . . .	74
6.6	Dvoubodová interpolace: případ $\omega_1 > 0$ . . . . .	95

<b>7</b>	<b>Revize Zieglerovy–Nicholsovy frekvenční metody</b>	<b>103</b>
7.1	Úvod . . . . .	103
7.2	Zieglerova–Nicholsova frekvenční metoda . . . . .	104
7.3	Vlastnosti ZNF metody . . . . .	106
7.3.1	Případ PI regulátoru . . . . .	106
7.3.2	Případ PID regulátoru . . . . .	109
7.4	Nová modifikace ZNF metody . . . . .	111
7.4.1	Případ PI regulátoru . . . . .	111
7.4.2	Případ PID regulátoru . . . . .	116
7.5	Dvoubodová metoda . . . . .	120
7.5.1	Případ PI regulátoru . . . . .	121
7.5.2	Případ PID regulátoru . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>125</b>

# Předmluva

Již velmi dlouho jsem chtěl napsat práci, která by teoreticky zdůvodnila nebo vyvrátila různé empirické metody používané při seřizování regulačních smyček v průmyslu. Vedly mě k tomu zejména dva důvody. Za prvé, dlouhá léta působím v průmyslu v oblasti řízení procesů a současně mám rád teorii automatického řízení. Za druhé, navzdory obrovské inflaci teoretických pojednání o syntéze regulátorů v posledních 50-ti letech, jsou empirické či inženýrské metody natolik oblíbené a rozšířené v průmyslu, že se staly základem algoritmů pro automatické seřizování parametrů pro převážnou většinu kompaktních regulátorů uvedených na trh v posledních 15-ti letech. Skutečnost, že výrobci regulátorů téměř jednoznačně dávají přednost empirii před teorií, je jistě velmi provokující.

K definitivnímu rozhodnutí, že se o to skutečně pokusím, jsem dospěl přibližně před třemi lety po opakovaném přečtení slavného článku Zieglera a Nicholse z roku 1942 o optimálním seřizování regulátorů. V tomto článku jsou popsány dvě nejznámější a nejužívanější empirické metody, pro rychlé „optimální“ nastavení regulátorů na základě jednoduchého experimentu, kterým se určí pouze dvě charakteristická čísla řízeného systému. Jak překvapivě málo stačí znát o řízeném procesu, abychom mohli podle těchto metod určit optimální parametry regulátoru! Přitom autoři své metody nijak nezduvodňují a pouze slibují, že až dozraje matematické odvození, bude publikováno. Zdá se, že k tomu zatím nedošlo. Alespoň já jsem nenašel žádné uspokojivé zdůvodnění. Všechny mně známé práce týkající se metod Zieglera a Nicholse mají podobně jako původní článek empirický charakter. Do této kategorie patří i četné a velmi dobře známé práce Aströma a jeho spolupracovníků z posledních 20-ti let.

Tato práce je věnována podrobné teoretické analýze a zobecnění jedné z Zieglerových – Nicholsových metod. Jde o tzv. frekvenční metodu, která pro návrh P, PI a PID regulátoru používá znalosti jediného bodu frekvenční charakteristiky řízeného systému, odpovídajícího fázovému zpoždění  $180^\circ$ . K tomu, aby mohla být zmíněná analýza provedena, je nejprve nutné novým způsobem definovat úlohu návrhu regulátoru pro případ, kdy je řízený systém popsán jistou apriorní informací a několika málo experimentálně určenými charakteristickými čísly. Na rozdíl od běžné formulace návrhové úlohy, kde navrhujeme regulátor pro jediný nominální model, je nutné zde pracovat s tzv. množinovým modelem, který obsahuje všechny přípustné systémy, vyhovující apriorním informacím a experimentálně získaným charakteristickým číslům. Řešení takto definované úlohy si vyžádalo vybudovat dosti hluboký matematický aparát, který jak doufám může být dále podstatně zobecněn. S jeho pomocí je ukázáno, že původní Zieglerova-Nicholsova metoda je velmi nespolehlivá, překvapivě i v případech, kdy se omezíme pouze na „velmi rozumné“ řízené procesy.

Její použití v takovémto případě pro PI regulátor může dokonce vést na nestabilní uzavřenou smyčku. Takto je současně dokázáno, že dosti rozšířené reléové PI(D)-autotunery založené na identifikaci kritického zesílení a kritické periody kmitů mohou i pro „rozumné“ procesy dávat zcela špatné parametry regulátoru. Hlavní výsledky této práce jsou však pozitivní. Zde rozvinutý nový přístup k návrhu robustních regulátorů umožňuje vhodně modifikovat a zobecnit Zieglerovu-Nicholovu frekvenční metodu. Tak se z nespolehlivé empirické metody stává spolehlivá teoreticky podložená metoda s přesně vymezeným oborem aplikovatelnosti. Metoda s těmito vlastnostmi a přitom stejně jednoduchá jako původní inženýrská metoda se zdá být ideální pro realizaci průmyslových autotunerů.

Na závěr bych rád poděkoval všem mým kolegům, kteří byli ochotni se mnou diskutovat o problémech týkajících se této práce. Zvláštní dík patří P. Baldovi, M. Štětinovi, J. Mošnovi, J. Melicharovi a E. Janečkovi, kteří četli části rukopisu této práce. Upřímně děkuji také profesorovi P. Žampovi, který mně vytvořil prostor pro dokončení mé práce na své katedře kybernetiky FAV ZČU v Plzni.

Miloš Schlegel

Plzeň, 29.2. 2000  
Katedra kybernetiky  
FAV ZČU v Plzni

# Kapitola 1

## Úvod

Jednoduché či jednosmyčkové kompaktní regulátory se používají v průmyslu již více než 65 let. Zhruba před šedesáti lety uvedla na trh firma Taylor Instruments první (tehdy ještě pneumatický) regulátor s derivační složkou. Od té doby proběhl bouřlivý vývoj. Od pneumatické implementace se přešlo na analogovou a poté na současnou mikroprocesorovou technologii. Zajímavé však je, že základní funkční vlastnosti průmyslového regulátoru se v podstatě nezměnily. Zákonem řízení vytrvale zůstává standardní PID algoritmus. Stále stejný problém musí řešit i regulační technici, kteří seřizují dva či tři volné parametry PI(D) regulátoru v procesu uzavírání regulačních smyček. Bez nadsázky lze tvrdit, že výběr typu regulátoru a seřízení jeho parametrů (případně spolu s návrhem akčního členu) jsou základními problémy průmyslové regulace. Úspěšné či neúspěšné zvládnutí těchto činností má v konkrétním případě obvykle značné ekonomické důsledky. Navzdory tomu není většina regulátorů v průmyslu (u nás ani ve světě) vhodně navržena nebo seřízena. Mnoho z nich dokonce pracuje v otevřené smyčce a vyžaduje neustálou pozornost „nenahraditelného“ operátora. V současnosti se v průmyslové praxi používají zhruba čtyři postupy návrhu regulátorů typu PID: metoda pokus-omyl, analytické metody, inženýrské metody, automatické seřízení.

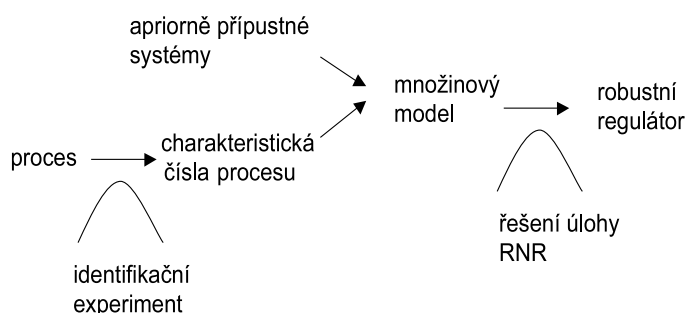
*Metoda pokus-omyl* je nejčastějším postupem. Spočívá v přímém experimentování s uzavřenou regulační smyčkou. Metodou pokus-omyl jsou voleny hodnoty parametrů regulátoru a podle tvaru odezvy se subjektivně usuzuje na jejich vhodnost. Pro zefektivnění se často používají různá empirická pravidla. Tento postup, provádí-li ho zkušený expert, může být relativně úspěšný v případě dobře regulovatelných systémů s celkovou dobou odezvy nepřekračující několik málo minut. Pro pomalejší systémy je však nepoužitelný z důvodu extrémních nároků na čas.

*Analytické metody* jsou v praxi pravděpodobně nejméně používané. Jejich princip spočívá v návrhu regulátoru některou z analytických metod (pro přehled viz [29]) na základě matematického modelu řízeného systému. Tento postup je ve shodě s obecným přístupem současné teorie automatického řízení. V případě, kdy lze získat uspokojivý model pomocí matematicko-fyzikální analýzy, může být tento postup velmi užitečný. Bohužel v průmyslu jsou takové situace velmi řídké. Získání dostatečně přesného modelu experimentální identifikací je velmi nákladné a většinou i obtížně proveditelné.

*Inženýrský postup* je jakýmsi kompromisem mezi dvěma předešlými me-



Ve skutečnosti však byla stejná myšlenka publikována mnohem dříve Rotačem [6]. V práci [42] jsou obě Zieglerovy–Nicholsovy metody vylepšeny přidáním dalšího (třetího) charakteristického čísla – statického zesílení řízeného systému. Výsledkem jsou mnohem spolehlivější, avšak stále empirické metody bez přesnějšího vymezení oboru aplikovatelnosti. Poznamenejme ještě, že přidáním třetího charakteristického čísla se stává identifikační experiment časově náročnější, a tudíž méně vhodný pro realizaci „rychlého“ průmyslového autotuneru.



Obrázek 1.2: Obecné schéma nového robustního autotuneru

V této práci je rozvinut nový přístup k robustnímu návrhu průmyslových regulátorů motivovaný Zieglerovou–Nicholsovou frekvenční metodou (dále jen ZNF). Základem tohoto přístupu je tzv. množinový model procesu, který je definován jako množina přípustných přenosů, které vyhovují informacím dvojího druhu o řízeném systému: apriorní informaci a informaci získané měřením v identifikačním experimentu. Apriorní informace určuje tvar přenosu a omezení na polohu pólů. Jejím cílem je vydělit z množiny všech lineárních systémů přesně definovanou a relativně úzkou množinu „rozumných“ systémů, pomocí nichž lze dostatečně přesně popsat uvažovaný okruh reálných technologických procesů. Systémy z této třídy budeme nazývat apriorně přípustnými systémy. Informace získaná měřením se skládá podobně jako u inženýrských metod z několika málo charakteristických čísel procesu. V této práci to budou výhradně charakteristická čísla určující jeden nebo dva body frekvenční charakteristiky. Všechny apriorně přípustné přenosy s naměřenými charakteristickými čísly tvoří dohromady množinu přípustných systémů neboli množinový model. Úloha robustního návrhu regulátoru spočívá nyní v nalezení takového regulátoru, který zajistí splnění stanovených požadavků pro libovolný systém patřící do množiny přípustných systémů (do množinového modelu) a který současně minimalizuje zvolené optimalizační kritérium. Celý tento postup určení parametrů regulátoru můžeme znázornit pomocí obecného schématu na obr. 1.2. Nejobtížnější krok je zde řešení úlohy robustního návrhu regulátoru (RNR), neboť množinový model je typicky velmi obtížně charakterizovatelná množina vysoké dimenze. Naštěstí lze za rozumných předpokladů dokázat, že pro účely nalezení řešení je možné tuto množinu nahradit jistou dobře charakterizovatelnou množinou s dimenzí jedna – tzv. reprezentativní podmnožinou. Tento základní výsledek nám nejprve umožní jasně ukázat, že původní ZNF metoda a též všechny její modifikace vycházející ze znalosti kritického bodu frekvenční charakteristiky jsou



velmi nespolehlivé a to dokonce i v případě „rozumných“ řízených procesů. Například návrh PI regulátoru ZNF metodou pro běžné statické systémy s monotónní přechodovou charakteristikou může vést na nestabilní uzavřenou smyčku. Konstruktivní popis reprezentativní podmnožiny nám dále umožní efektivně řešit všechny potřebné úlohy RNR vedoucí k teoreticky podloženým modifikacím ZNF metody.

Za prvé ukážeme, že za jistých rozumných apriorních předpokladů lze navrhnout „vyhovující“ PI(D) regulátor pouze na základě znalosti jediného chytře vybraného bodu frekvenční charakteristiky procesu. Fázové zpoždění takového bodu je však na rozdíl od ZNF metody podstatně menší než  $180^\circ$ , a navíc závisí na typu regulátoru a na požadované bezpečnosti ve stabilitě. Takto obdržíme spolehlivou a v jistém smyslu nejlepší možnou modifikaci ZNF metody vycházející pouze ze znalosti jediného bodu frekvenční charakteristiky. Z nespolehlivé empirické metody se tak stává spolehlivá teoreticky podložená metoda s přesně vymezeným oborem aplikovatelnosti. Metoda s těmito vlastnostmi se zdá být ideální pro realizaci nejjednodušších a nejrychlejších autotunerů.

Druhý hlavní výsledek je exaktní odvození jistého zpřesnění ZNF metody. V tomto případě je PI(D) regulátor navrhován na základě znalosti tří charakteristických čísel určujících polohu jednoho bodu frekvenční charakteristiky a velikost statického zesílení procesu. Navržená metoda je vhodná pro realizaci přesných autotunerů.

Nyní si podrobněji všimněme členění a obsahu této práce. Kapitola 2 je přípravná a jsou v ní připomenuty některé méně známé pojmy a tvrzení, které užijeme především v kap. 6. Kapitoly 3 až 7 obsahují původní výsledky. Kapitola 3 má dva cíle. Za prvé formulovat optimalizační úlohu návrhu regulátoru s omezenou strukturou vycházející z klasických požadavků na funkci regulační smyčky. Za druhé ukázat, že pro exaktní návrh optimálního PI regulátoru (podle této úlohy) stačí znát frekvenční charakteristiku procesu pouze v malém okolí bodu s fázovým zpožděním  $90^\circ$ . Tento zajímavý výsledek má posloužit jako motivace a výchozí bod pro nový přístup k návrhu regulátorů, kterému jsou věnovány kap. 4 až 6. Kapitola 4 uvádí novou formulaci úlohy robustního návrhu regulátoru a klíčový princip jejího zjednodušení. Pro tento účel jsou zavedeny důležité pojmy extrémálního přenosu a reprezentativní podmnožiny množiny přípustných přenosů. V kapitole 5 je pojednáno o množinových modelech. Je podána úplná charakterizace reprezentativní podmnožiny v případě, kdy známe jeden nebo dva body frekvenční charakteristiky. Důkazy zde uvedených tvrzení je možno nalézt v kap. 6, která je věnována matematickým základům nového přístupu k robustnímu návrhu regulátorů. Konkrétně je tu zkoumán speciální polynomiální interpolační problém s vedlejší podmínkou na  $\mathcal{D}$ -stabilitu interpolačních polynomů. Zde můžeme nalézt též některá tvrzení, která naznačují cestu k zobecnění výsledků uvedených v kap. 5. Čtenáři, kteří se nezajímají o důkazy však mohou tuto kapitolu bez obav ze ztráty porozumění přeskocit. Kapitola 7 obsahuje hlavní (z hlediska využití) výsledky této práce. Nový přístup rozvinutý v kap. 4 a 5 je zde použit k exaktní teoretické analýze, modifikaci a zobecnění ZNF metody. Výsledkem jsou nové algoritmy vhodné pro realizaci spolehlivých průmyslových autotunerů. Stručné shrnutí dosažených výsledků a naznačení perspektivních směrů dalšího výzkumu je uvedeno v závěrečné kapitole 8.

## Kapitola 2

# Přípravná kapitola

V této kapitole ve stručné formě připomeneme některé méně známé matematické pojmy, označení a tvrzení, které jsou využívány v této práci bez dalšího vysvětlení.

### 2.1 Seznam označení

$\triangleq$	definiční relace
■	konec důkazu
$\emptyset$	prázdná množina
$A \cup B$	sjednocení množin $A$ a $B$
$A \cap B$	průnik množin $A$ a $B$
$A - B$	rozdíl množin $A$ a $B$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R}^- \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+ \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\lfloor x \rfloor$	celá část čísla $x \geq 0$
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{C}^\#$	$\mathbb{C}^\# = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$j$	imaginární jednotka $\sqrt{-1}$
$Re z$	reálná část komplexního čísla $z$
$Im z$	imaginární část komplexního čísla $z$
$Arg z$	$Arg z = \varphi$ právě tehdy, jestliže $z = e^{j\varphi} z $ , $\varphi \in (0, 2\pi)$
$\arg p(j\omega)$	celkový úhel, o který se otáčí průvodič $p(j\alpha)$ kolem bodu 0 proběhne-li parametr $\alpha$ interval $\langle 0, \omega \rangle$ v kladném směru
$\mathbb{C}^-$	$\mathbb{C}^- \triangleq \{z \in \mathbb{C} : Re z \leq 0\}$
$\mathbb{C}^+$	$\mathbb{C}^+ \triangleq \{z \in \mathbb{C} : Re z \geq 0\}$
$\mathcal{D}$	symetrická množina komplexních čísel: $s \in \mathcal{D}$ implikuje $\bar{s} \in \mathcal{D}$
$M^\circ$	vnitřek množiny $M$
$\partial M$	hranice množiny $M$
$clM$	uzávěr množiny $M$
$z \cdot M$	součin čísla $z$ , $z \in \mathbb{C}$ s množinou $M$ , $M \subset \mathbb{C}$ , $z \cdot M \triangleq \{w = z \cdot x : x \in M\}$
$z + M$	součet čísla $z$ , $z \in \mathbb{C}$ s množinou $M$ , $M \subset \mathbb{C}$ , $z + M \triangleq \{w = z + x : x \in M\}$
$d(p(s))$	stupeň polynomu $p(s)$

## 2.2 Vlastnosti přenosu

Přenos  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , kde  $a(s)$  a  $b(s)$  jsou polynomy s reálnými koeficienty, budeme nazývat ryzí, jestliže stupeň jmenovatele je větší nebo roven stupni čitatele. Tj.  $d(a(s)) \geq d(b(s))$ . Platí-li ostrá nerovnost budeme říkat, že  $G(s)$  je striktně ryzí. Přenos  $G(s)$ , resp. polynom  $a(s)$ , budeme nazývat stabilní, jestliže všechny kořeny polynomu  $a(s)$  leží v levé otevřené polorovině komplexní roviny.

## 2.3 Pojmy spojené s komplexní rovinou

Komplexní rovinu budeme označovat symbolem  $\mathbb{C}$ . Množinu  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  budeme nazývat uzavřenou nebo rozšířenou komplexní rovinou a budeme ji označovat  $\mathbb{C}^\#$ . Symbolem  $\mathbb{C}^-$  resp.  $\mathbb{C}^+$  budeme označovat levou, resp. pravou, uzavřenou polorovinu komplexní roviny. Tedy např.  $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ .

Bod  $z$  nazveme *vnitřním* bodem, resp. *vnějším* bodem množiny  $M$ , jestliže existuje okolí tohoto bodu, které leží v množině  $M$ , resp. v jejím doplňku  $\mathbb{C}^\# - M$ . Množinu všech vnitřních bodů množiny  $M$  nazveme *vnitřkem* množiny  $M$  a budeme ji značit  $M^\circ$ . Je-li  $M = M^\circ$ , potom říkáme, že množina  $M$  je *otevřená*. Bod, který není ani vnitřním, ani vnějším bodem množiny  $M$ , budeme nazývat *hraničním* bodem množiny. *Hranice* množiny  $M$  se skládá ze všech hraničních bodů množiny  $M$  a budeme ji označovat symbolem  $\partial M$ . Množinu  $M \cup \partial M$  budeme nazývat *uzávěrem* množiny  $M$  a budeme ji značit symbolem  $clM$ . Je-li  $M = clM$ , potom říkáme, že množina  $M$  je *uzavřená*.

Množiny  $A, B$  budeme nazývat *oddělené*, jestliže  $clA \cap clB = \emptyset$ . Budeme říkat, že množina je *souvislá*, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. *Oblast* je souvislá otevřená množina, *kontinuum* je souvislá uzavřená množina.

*Křivkou* rozumíme každé spojitě zobrazení uzavřeného intervalu reálných čísel do množiny  $\mathbb{C}^\#$ . Křivku  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  nazveme *hladkou*, jestliže funkce  $\varphi$  má na intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitou a od nuly různou derivaci  $\varphi'$ . Křivku  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}^\#$  nazveme *prostou* (nebo *jednoduchou*), jestliže  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  pro libovolné  $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ ,  $0 < |t_2 - t_1| < b - a$ . Je-li  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}^\#$  křivka a  $\varphi(\langle a, b \rangle) \subset \Omega \subset \mathbb{C}^\#$ , říkáme, že  $\varphi$  je křivka v množině  $\Omega$ .

Je-li  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}^\#$  křivka, potom každý bod  $\varphi(t)$  pro  $t \in \langle a, b \rangle$  budeme nazývat *bodem* křivky  $\varphi$ . Bod  $\varphi(a)$  budeme nazývat *počátečním* bodem (značíme p.b. $\varphi$ ) křivky  $\varphi$ , bod  $\varphi(b)$  *koncovým* bodem (značíme k.b. $\varphi$ ) křivky  $\varphi$  a body  $\varphi(a), \varphi(b)$  nazýváme *krajními* body křivky  $\varphi$ . Někdy budeme o křivce  $\varphi$  hovořit jako o *orientované* křivce. V takovém případě je orientace křivky uvažována od počátečního bodu křivky ke koncovému bodu křivky. Budeme říkat, že křivka  $\varphi$  je *uzavřená*, jestliže splývají její krajní body, tj. když p.b. $\varphi =$  k.b. $\varphi$ .

Nechť  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je uzavřená křivka a  $z_0 \in \mathbb{C}^\# - \varphi(\langle a, b \rangle)$  potom *indexem bodu*  $z_0$  ke křivce  $\varphi$  budeme nazývat číslo  $Ind_\varphi(z_0)$ , které udává „počet oběhů křivky  $\varphi$  kolem bodu  $z_0$ “. Přitom se kladně započítávají oběhy „ve směru hodinových ručiček“ a záporně oběhy opačné.

Nechť  $\varphi_i : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1$ , jsou uzavřené křivky v oblasti  $\Omega$ . Říkáme, že  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$  jsou  *$\Omega$ -homotopické*, existuje-li spojitě zobrazení  $H : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \Omega$  takové, že pro všechna  $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$H(s, 0) = \varphi_1(s), \quad H(s, 1) = \varphi_2(s), \quad H(0, t) = H(1, t). \quad (2.1)$$

Položme  $\varphi_t(s) \triangleq H(s, t)$ , potom (2.1) definuje jednoparametrický systém uzavřených křivek  $\varphi_t$  v  $\Omega$ , který spojuje  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$ . Intuitivně to znamená, že  $\varphi_0$  lze spojitě zdeformovat na  $\varphi_1$  v mezích oblasti  $\Omega$ . Platí intuitivně zřejmá, avšak ne zcela jednoduše dokazatelná věta [46]:

**Věta 2.3.1.** *Nechť  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$  jsou  $\Omega$ -homotopické uzavřené křivky v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Platí-li  $\alpha \notin \Omega$ , potom*

$$\text{Ind}_{\varphi_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\varphi_1}(\alpha).$$

Nechť  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  jsou jednoduché hladké křivky, pro které platí

$$k.b.\varphi_i = p.b.\varphi_{i+1} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

a

$$k.b.\varphi_n = p.b.\varphi_1$$

Spojením křivek  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  obdržíme uzavřenou po částech hladkou křivku  $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \dots \dot{+} \varphi_n$ . Je-li  $\varphi$  jednoduchá křivka, potom  $\varphi$  rozděluje komplexní rovinu  $\mathbb{C}$  na dvě disjunktní oblasti  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ , z nichž jedna z nich, řekněme  $\Omega_1$ , je omezená. Kontinuum  $cl\Omega_1$  budeme nazývat *křivoúhelníkem*, křivky  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  jeho *stranami* a  $p.b.\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  jeho *vrcholy*. Pojem křivoúhelník budeme výjimečně používat i v případě, kdy křivka  $\varphi$  sama sebe protíná. V takovém případě však nutné pro definici bodů patřících do křivoúhelníka použít pojem indexu bodu vzhledem ke křivce  $\varphi$ .

Nechť  $z \in \mathbb{C}$  a  $M \subset \mathbb{C}$  je množina, potom symbolem  $z \cdot M$  budeme označovat množinu  $\{w = z \cdot x : x \in M\}$  a budeme říkat, že  $z \cdot M$  je součin čísla  $z$  a množiny  $M$ . Všimněme si, že platí:  $\partial(z \cdot M) = z \cdot \partial M$ .

## 2.4 Řešení rovnic

Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z, w) &= 0 \\ \omega(x, y, z, w) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde funkce  $\lambda(x, y, z, w)$ ,  $\omega(x, y, z, w)$  jsou spolu se svými parciálními derivacemi definované a spojitě v jisté otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^4$ . Zajímá nás, za jakých předpokladů lze spojitým způsobem rozřešit soustavu rovnic (2.2) vzhledem k  $z$  a  $w$ , tj. vyjádřit  $z$  a  $w$  jako spojitě funkce proměnných  $x, y$ . Odpověď dává následující věta [36]:

**Věta 2.4.1.** *Nechť  $[x_0, y_0, z_0, w_0]^T \in G$  a platí*

$$\begin{aligned} \lambda(x_0, y_0, z_0, w_0) &= 0 \\ \omega(x_0, y_0, z_0, w_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \lambda(x_0, y_0, z_0, w_0) & \frac{\partial}{\partial w} \lambda(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ \frac{\partial}{\partial z} \omega(x_0, y_0, z_0, w_0) & \frac{\partial}{\partial w} \omega(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.4}$$

potom existují takové spojité funkce  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  definované v jistém okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , že

$$\begin{aligned}\lambda(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) &= 0 \\ \omega(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) &= 0 \\ \varphi(x_0, y_0) &= z_0 \\ \psi(x_0, y_0) &= w_0\end{aligned}$$

Z věty 2.4.1, kterou lze mimochodem zobecnit na libovolný počet rovnic a libovolný počet proměnných, plyne jeden důležitý důsledek:

Nechť funkce  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  udávající řešení soustavy (2.3) jsou definovány na kompaktní podmnožině  $G_0 \subset G$  a nechť

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\lambda(x, y, z, w) & \frac{\partial}{\partial w}\lambda(x, y, z, w) \\ \frac{\partial}{\partial z}\omega(x, y, z, w) & \frac{\partial}{\partial w}\omega(x, y, z, w) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pro libovolný bod  $(x, y, z, w) \in G_0$ , potom řešení  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  lze rozšířit na kompaktní množinu  $G_1 \subset G$  takovou, že  $G_0 \subset G_1^\circ$ .

## 2.5 Metoda geometrického místa kořenů

Uvažujme svazek polynomů s reálnými koeficienty

$$p_\lambda(s) = q(s) + \lambda r(s),$$

kde  $q(s), r(s)$  jsou polynomy po řadě stupně  $n$  a  $m$ ,  $n \geq m$ , jejichž koeficienty u nejvyšších mocnin jsou kladné. Dále předpokládejme, že kořeny polynomů  $q(s)$  a  $r(s)$  jsou známé. To, co nás zajímá, je vývoj kořenů polynomu  $p_\lambda(s)$ , jestliže parametr  $\lambda$  probíhá interval  $\langle 0, +\infty \rangle$  nebo  $\langle -\infty, 0 \rangle$ . Evansova metoda [31] umožňuje bez složitého počítání určit přesný nebo přibližný tvar křivek v komplexní rovině (tzv. kořenových větví), po kterých běhají jednotlivé kořeny polynomu  $p_\lambda(s)$ . Pro konstrukci kořenových větví Evansova metoda formuluje celou řadu různých exaktních pravidel. Pro naše účely vystačíme pouze s dvěma z nich:

1. Existuje právě  $n$  kořenových větví, které vychází z kořenů polynomu  $q(s)$  ( $\lambda = 0$ ). Z těchto  $n$  větví jich  $m$  končí v kořenech polynomu  $r(s)$  ( $\lambda \rightarrow \pm\infty$ ) a zbylých  $n - m$  jich končí v bodě  $\infty$  ( $\lambda \rightarrow \pm\infty$ ) komplexní roviny.
2. To, zda některá kořenová větev polynomu  $p_\lambda(s)$  prochází bodem  $z$  ležícím na reálné ose, lze rozhodnout podle celkového počtu reálných kořenů polynomů  $p(s)$  a  $r(s)$  ležících napravo od bodu  $z$ . Toto pravidlo je závislé na tom, zda vyšetřujeme případ  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  nebo  $\lambda \in \langle -\infty, 0 \rangle$ .

### Případ $\lambda > 0$

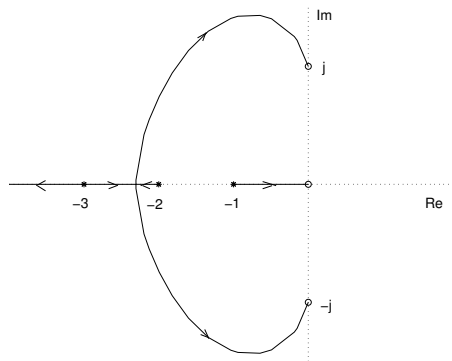
Bod  $z \in \mathbb{R}$  je kořen polynomu  $p_\lambda(s)$  pro některé  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  právě tehdy, jestliže celkový počet reálných kořenů polynomů  $q(s)$  a  $r(s)$  větších než  $z$  je *lichý*.

### Případ $\lambda < 0$

Bod  $z \in \mathbb{R}$  je kořen polynomu  $p_\lambda(s)$  pro některé  $\lambda \in \langle -\infty, 0 \rangle$  právě tehdy,

jestliže celkový počet reálných kořenů polynomů  $q(s)$  a  $r(s)$  větších než  $z$  je *sudý*.

**Příklad 1** Nechtě  $q(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 3)^2$ ,  $r(s) = s(s + j)(s - j)$  a  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Na obr.2.1 jsou kořeny polynomu  $q(s)$  označeny křížkem a kořeny polynomu  $r(s)$  kroužkem. Šipky na křivkách (kořenových větvích) vyznačují směr pohybu kořenů polynomu  $p_\lambda(s)$  při probíhání parametru  $\lambda$  intervalem  $(0, +\infty)$  v kladném směru.



Obrázek 2.1: Geometrické místo kořenů polynomu  $p_\lambda(s)$  pro  $\lambda \in (0, +\infty)$

## 2.6 Michajlovovo kritérium stability

Nechtě  $p(s)$  je polynom s reálnými nezápornými koeficienty, potom je  $p(s)$  stabilní polynom právě tehdy, jestliže přírůstek  $\arg p(j\omega)$  při probíhání  $\omega$  intervalem  $(0, +\infty)$  v kladném směru je  $n\frac{\pi}{2}$  [32]. Navíc je funkce  $\arg p(j\omega)$  v tomto intervalu monotónní.

## Kapitola 3

# Co potřebujeme znát pro návrh PI regulátoru

*V této kapitole je formulována úloha návrhu regulátoru s omezenou strukturou vycházející z klasických požadavků na funkci regulační smyčky ve formě optimalizační úlohy s omezením. Řešením této úlohy pro případ PI regulátoru se dochází k pozoruhodnému závěru, že totiž (za dosti obecných podmínek) pro exaktní návrh optimálního PI regulátoru (v přesně definovaném smyslu) stačí znát pouze dva body frekvenční charakteristiky nacházející se v blízkosti frekvence  $\omega_{90}$  (odpovídající fázovému zpoždění  $90^\circ$ ). Tento výsledek může posloužit jako dobrá motivace a výchozí bod pro nový přístup k návrhu regulátorů, který je uvedený v dalších kapitolách této práce.*

### 3.1 Úvod

Co nutně musíme znát o řízeném systému, abychom mohli určit vyhovující parametry regulátoru daného typu? Z klasické teorie řízení je známo, že pro uspokojivý návrh jednoduchých regulátorů s omezenou strukturou stačí obvykle znát pouze několik málo bodů frekvenční charakteristiky řízeného systému ve frekvenčním pásmu  $0 \leq \omega \leq \omega_{180}$ , kde  $\omega_{180}$  je nejnižší z frekvencí, při kterých má řízený systém fázové zpoždění  $180^\circ$ . V tomto směru je přímo extrémně známá Zieglerova-Nicholsova frekvenční metoda [1], neboť bez hlubšího zdůvodnění využívá pro návrh PI(D) regulátoru pouze jeden bod frekvenční charakteristiky odpovídající frekvenci  $\omega_{180}$ . Podobně některé další metody [11] vycházejí z odhadu dvou bodů frekvenční charakteristiky. Zdá se tedy, že v běžných případech stačí pro návrh PI(D) regulátoru získat o řízeném systému mnohem menší objem informací, než poskytuje obvyklý nominální model ve tvaru přenosové funkce. Exaktní formulace a důkaz tvrzení tohoto typu jsou předmětem této kapitoly. Konkrétně je dokázáno, že pro návrh optimálního PI regulátoru (v přesně definovaném smyslu) za značně obecných podmínek stačí znát pouze dva body frekvenční charakteristiky řízeného systému v blízkosti frekvence  $\omega_{90}$  (odpovídající fázovému zpoždění  $90^\circ$ ). Tento původní výsledek (již dříve publikovaný v [40]) se zdá být dobrou motivací pro exaktní revizi populárních empirických metod Zieglerova-Nicholsova typu užívaných ve většině autotunerů současných průmyslových regulátorů. Obsah této kapitoly má navíc za cíl po-

sloužit jako stručný úvod do problému návrhu průmyslových regulátorů. Poznamenejme ještě, že v nedávné práci [38] je formulována a řešena velmi podobná návrhová úloha pro PI regulátor, avšak s méně explicitními výsledky.

## 3.2 Formulace návrhové úlohy

Uvažujme jednoduchou lineární zpětnovazební smyčku znázorněnou na obr. 3.1, kde  $F$  a  $G$  jsou po řadě přenos řízeného systému a přenos regulátoru. Pro účely této kapitoly budeme předpokládat

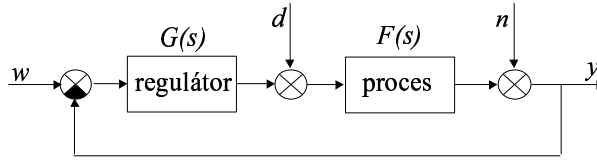
$$F(s) = \frac{\overline{F}(s)}{s^a}, \quad a \in \{0, 1, \dots\}, \quad \overline{F}(s) \text{ je stabilní,} \quad (3.1)$$

$$0 < \overline{F}(0) < \infty \quad \text{a} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0,$$

$$G(s) = \frac{\overline{G}(s)}{s^b}, \quad b \in \{0, 1, \dots\}, \quad \overline{G}(s) \text{ je stabilní,} \quad (3.2)$$

$$0 < \overline{G}(0) < \infty,$$

$$a + b \geq 1. \quad (3.3)$$



Obrázek 3.1: Jednoduchá regulační smyčka

Předpoklad (3.1) požaduje, aby řízený systém měl stupeň astatismu  $astF(s) = a$  (tj.  $a$  pólů v nule), dále aby jeho nenulové póly byly stabilní a konečně aby jeho přenos zanikal na vysokých frekvencích (jde o tzv. striktně ryzí dynamický systém). Předpoklad (3.2) je zformulován tak, aby mu vyhovoval v průmyslové praxi nejčastěji používaný regulátor, tj. regulátor PI(D) s přenosem

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right), \quad (3.4)$$

kde  $K, T_i, T_d$  a  $N$  jsou kladná reálná čísla, která budeme nazývat parametry regulátoru. V obecném případě předpokládáme, že  $G(s)$  je přenos s omezenou strukturou. Jeho volné parametry budeme souhrnně označovat symbolem  $par G$  a příslušnou přípustnou množinu jejich hodnot  $P$ . Předpoklad (3.3) vyjadřuje požadavek na nulovou odchylku v ustáleném stavu při skokové změně požadované hodnoty  $w$  nebo poruchy  $n$ .

Vlastnosti regulační smyčky z obr. 3.1 lze vyjádřit pomocí tří následujících přenosů:

Přenos otevřené smyčky

$$L(s) \triangleq G(s)F(s) = \frac{1}{s^{a+b}} \overline{G}(s) \overline{F}(s) \triangleq \frac{1}{s^{a+b}} \overline{L}(s). \quad (3.5)$$



Citlivostní funkce (přenos  $n \rightarrow y$ )

$$S(s) \triangleq \frac{1}{1 + L(s)}. \quad (3.6)$$

Přenos uzavřené smyčky nebo-li tzv. komplementární citlivostní funkce (přenos  $w \rightarrow y$ )

$$Q(s) \triangleq \frac{L(s)}{1 + L(s)} = 1 - S(s). \quad (3.7)$$

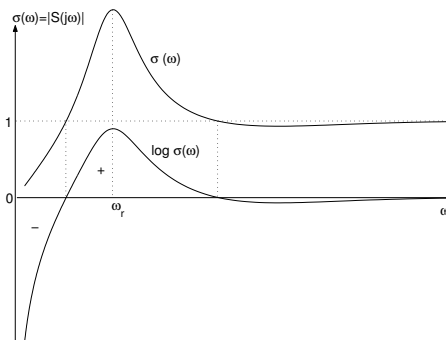
Předtím, než zformulujeme návrhovou úlohu, uvedeme dva myšlenkové kroky, které objasňují základní požadavky na funkci regulační smyčky.

1. Nejprve vyjděme z předpokladu, že  $w(t) = d(t) = 0$  a porucha  $n$  má sinusový průběh, tedy  $n(t) = A_n \sin \omega t$ . Z uvažované lineariry smyčky vyplývá, že porucha  $n$  způsobí v ustáleném stavu sinusové kmitání regulované veličiny  $y(t) = A_y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ . Zaveďme nyní tzv. dynamický činitel regulace pomocí vztahu

$$\sigma(\omega) \triangleq |S(j\omega)| = \frac{A_y(\omega)}{A_n}. \quad (3.8)$$

Úkolem regulátoru je zřejmě dosáhnout minimální hodnoty  $\sigma(\omega)$  pro všechny  $\omega \geq 0$ . Ideální požadavek je tedy  $\sigma(\omega) = 0, \forall \omega \geq 0$ . Bohužel tento požadavek nelze z fyzikálních, a dokonce ani matematických důvodů splnit. Typický průběh  $\sigma(\omega)$  pro dobře navrženou regulační smyčku je na obr. 3.2. Všimněte si, že výrazně lze potlačit pouze poruchy na nízkých frekvencích a úplného potlačení vlivu poruch je možné dosáhnout pouze při nulové frekvenci. V oblasti středních frekvencí regulátor naopak poruchy zesiluje a při vysokých frekvencích nemá na jejich velikost podstatný vliv. Za velmi obecných podmínek lze dokázat [14], že pro libovolný lineární regulátor platí

$$\int_0^{\infty} \log \sigma(\omega) d\omega = 0. \quad (3.9)$$



Obrázek 3.2: Dynamický činitel regulace (citlivostní funkce)

Tento vztah má následující interpretaci. Zmenšíme-li volbou regulátoru na daném frekvenčním intervalu  $\sigma(\omega)$  musí se funkce  $\sigma(\omega)$  nutně zvětšit na jiném

frekvenčním intervalu. Tomuto jevu se výstižně říká efekt vodní postele [31]. Protože obvykle neznáme frekvenční interval, ve kterém působí (náhradní) poruchy  $n$ , je rozumné požadovat maximální potlačení  $\sigma(\omega)$  na nejnižších frekvencích. Tento požadavek lze matematicky vyjádřit například následovně: hledáme takové parametry regulátoru  $G$ , které minimalizují první nenulovou derivaci  $\sigma(\omega)$  v bodě 0, tj.

$$I(G) \triangleq \left. \frac{d^k |S(j\omega)|}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = \frac{k!}{\overline{L}(0)} \rightarrow \min, \quad (3.10)$$

kde  $I(G)$  je kritérium kvality řízení a  $k = \text{ast } L(s) \geq 1$ . Speciálně pro statický přenos  $F(s)$  ( $a = 0$ ) a PI(D) regulátor s přenosem (3.4) je podmínka (3.10) ekvivalentní s požadavkem

$$I(G) = \frac{T_i}{K} \rightarrow \min. \quad (3.11)$$

2. Nyní uvažujme situaci, kdy  $d(t) = n(t) = 0$  a  $w(t) = A_w \sin \omega t$ . Podobně jako v předešlém případě vyplývá z linearity smyčky, že  $y(t) = A_y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ . Označme

$$\mu(\omega) \triangleq |Q(j\omega)| = \frac{A_y(\omega)}{A_w}. \quad (3.12)$$

Ideální požadavek na regulátor zřejmě je  $\mu(\omega) = 1, \forall \omega > 0$ , neboť požadujeme  $y(t) = w(t)$  pro všechny funkce  $w(t)$ . Bohužel ani tento požadavek nelze splnit. Typický průběh  $\mu(\omega)$  pro dobře navrženou regulační smyčku je na obr. 3.3a. Pro účel sledování je zřejmé, že čím větší je tzv. šířka pásma  $\omega_b$ , tím lépe. Zvětšujeme-li však vhodným výběrem regulátoru  $\omega_b$ , dochází obvykle ke zvětšování rezonančního převýšení

$$M_{CL} \triangleq \sup_{\omega} \mu(\omega) = \sup_{\omega} |Q(j\omega)| = |Q(j\omega_r)|. \quad (3.13)$$

O tomto rezonančním převýšení budeme dále hovořit jako o M-indexu uzavřené smyčky. Čím větší je jeho hodnota, tím je regulační smyčka náchylnější ke kmitání na frekvenci  $\omega_r$ . Rozumná hodnota M-indexu odpovídající obvykle požadované bezpečnosti ve stabilitě leží v intervalu  $\langle 1; 6 \rangle$ . Podmínku  $M_{CL} = M$ , kde  $M$  je návrhový parametr, lze transformovat na požadavek na přenos otevřené smyčky  $L(j\omega)$ , neboť platí následující tvrzení:

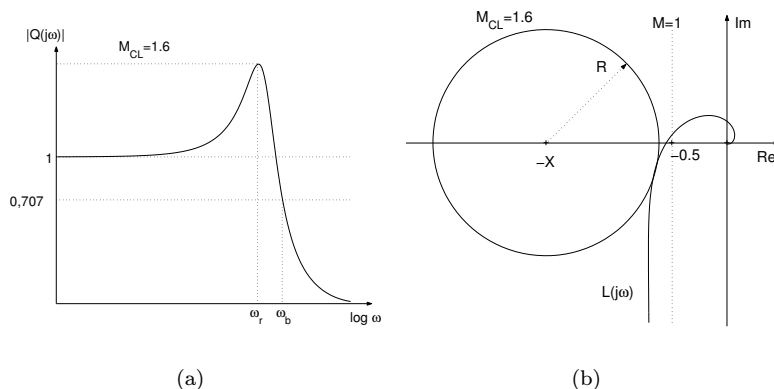
*Je-li  $\text{ast } L(s) \geq 1$  a uzavřená smyčka je stabilní, potom vztah  $M_{CL} = M \geq 1$  platí právě tehdy, jestliže Nyquistova křivka  $L(j\omega)$ ,  $\omega \in (0, +\infty)$  se právě dotýká, ale neprotíná a neobkličkuje tzv. M-kružnici (obr. 3.3b) se středem*

$$C = [-X, j0], \quad X = \frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (3.14)$$

a poloměrem

$$R = \frac{M}{|M^2 - 1|}. \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že M-kružnice pro  $M = 1$  degeneruje na tzv. M-přímku, což je přímka rovnoběžná s imaginární osou procházející bodem  $[-\frac{1}{2}, j0]$ . Odtud



Obrázek 3.3: Význam M-indexu

plyne, že pro  $M = 1$  je bezpečnost ve fázi alespoň  $60^\circ$  a bezpečnost v zesílení minimálně 2.

Nyní lze zformulovat návrhovou úlohu, kterou budeme dále nazývat M-úlohou:

**M-úloha:** Je dán frekvenční přenos řízeného systému  $F(j\omega)$ , struktura regulátoru a návrhový parametr  $M \geq 1$ . Určete parametry regulátoru  $G \in P$  tak, aby současně platilo:

- kritérium kvality řízení  $I(G)$  dané vztahem (3.10) je minimální;
- regulační smyčka je stabilní a její M-index  $M_{CL}$  je roven návrhovému parametru  $M$ ,  $M \geq 1$ .

Poznamenejme, že M-úloha je optimalizační úloha s kritériem kvality řízení (3.10) a s vedlejší podmínkou (3.13) doplněnou ještě podmínkou stability uzavřené smyčky. Regulátor (parametry regulátoru) splňující obě podmínky M-úlohy budeme nazývat optimálním regulátorem (optimálními parametry regulátoru). Je-li splněna pouze podmínka b) M-úlohy, budeme hovořit o suboptimálním regulátoru (o jeho suboptimálních parametrech).

M-úloha, na rozdíl od standardních optimalizačních úloh s integrálními kritérii kvality v časové oblasti, vychází přímo z klasických požadavků na funkci regulační smyčky ve frekvenční oblasti a v tomto směru je velmi podobná dnes rozsáhle zkoumaným optimalizačním metodám  $H^\infty$  [16]. Oproti nim má, jak dále ukážeme, tu přednost, že je za značně obecných podmínek explicitně řešitelná pro případ nejčastěji používaných regulátorů (PI, PID). Navíc její explicitní řešení přináší další pozoruhodnou informaci spočívající v tom, že k určení optimálních parametrů regulátoru daného typu není nutné (při splnění určitých podmínek) znát  $F(j\omega)$  v celém frekvenčním rozsahu, ale jen v určitém relativně velmi úzkém intervalu. Tato skutečnost má zcela zásadní význam pro volbu „návrhově orientovaného“ modelu řízeného procesu.

Možný způsob řešení M-úlohy pro velmi jednoduchý případ je uveden v následujícím příkladu.

**Příklad 1** Řešme M-úlohu  $F(s) = e^{-sD}$ ;  $D > 0$ ;  $G(s) = \frac{1}{T_i s}$ ;  $T_i > 0$ ;  $M = 1$ .  
V tomto případě platí

$$L(j\omega) = -\frac{\sin \omega D}{T_i \omega} - j \frac{\cos \omega D}{T_i \omega}. \quad (3.16)$$

Podmínka b) M-úlohy pro  $M = 1$  přechází v podmínku

$$\inf_{\omega} \operatorname{Re} L(j\omega) = \inf_{\omega} \left[ -\frac{\sin \omega D}{T_i \omega} \right] = -\frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Bod dotyku M-přímky a křivky  $L(j\omega)$  lze určit z podmínky

$$\frac{d}{d\omega} \operatorname{Re} L(j\omega) = \frac{D^2}{T_i} \left( -\frac{\cos \omega D}{\omega D} + \frac{\sin \omega D}{\omega^2 D^2} \right) = 0, \quad (3.18)$$

protože podle předpokladu je  $\frac{D^2}{T_i} > 0$ , musí platit

$$-\frac{\cos \omega D}{\omega D} + \frac{\sin \omega D}{\omega^2 D^2} = 0. \quad (3.19)$$

Položíme-li  $x = \omega D$  z (3.19) dostaneme rovnici

$$\tan x = x \quad (3.20)$$

Podmínce stability uzavřené smyčky vyhovuje pouze kořen  $x = 0$ , tj. bod dotyku pro frekvenci  $\omega = 0$ . Tedy

$$\inf_{\omega} \operatorname{Re} (Lj\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[ -\frac{\sin \omega D}{T_i \omega} \right] = -\frac{D}{T_i}. \quad (3.21)$$

Porovnáním (3.21) a (3.17) již obdržíme hledanou optimální hodnotu parametru I-regulátoru

$$T_i^* = 2D. \quad (3.22)$$

Poznamenejme, že uvedený přímý postup řešení nelze s úspěchem použít pro složitější případy řízeného systému a regulátoru, neboť příslušné výpočty se značně komplikují.

### 3.3 Robustnost návrhu

Předpokládejme, že regulátor  $G(s)$  je navržen řešením M-úlohy pro nominální systém s přenosem  $\hat{F}(s)$  a pro návrhový parametr  $M \geq 1$ . Zkoumejme nyní, jakou neurčitost  $\delta(\omega)$  lze připustit pro  $\hat{F}(j\omega)$ , jestliže požadujeme, aby M-index uzavřené smyčky pro řízený systém s frekvenčním přenosem  $F(j\omega)$ ,  $|F(j\omega) - \hat{F}(j\omega)| \leq \delta(\omega)$  nepřekročil hodnotu  $\overline{M} \geq M$ . Platí následující věta:

**Věta 3.3.1.** *Nechť*

$$L(s) = G(s)F(s), \quad (3.23)$$

$$Q(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (3.24)$$

jsou přenosové funkce odpovídající skutečnému přenosu  $F(s)$  řízeného systému a

$$\widehat{L}(s) = G(s)\widehat{F}(s), \quad (3.25)$$

$$\widehat{Q}(s) = \frac{\widehat{L}(s)}{1 + \widehat{L}(s)} \quad (3.26)$$

jsou přenosové funkce odpovídající nominálnímu přenosu  $\widehat{F}(s)$  a necht'  $\widehat{Q}(s)$  je stabilní a platí

$$\sup_{\omega} |\widehat{Q}(j\omega)| = M, \quad (3.27)$$

potom pro všechny  $F(s)$  splňující podmínku

$$|F(j\omega) - \widehat{F}(j\omega)| \leq \delta(\omega) \quad (3.28)$$

je  $Q(s)$  stabilní a platí

$$\sup_{\omega} |Q(j\omega)| \leq \overline{M} \geq M \quad (3.29)$$

právě tehdy, jestliže platí

$$\delta(\omega) \leq A_F(\omega) = \frac{|\widehat{F}(j\omega)|}{|\widehat{L}(j\omega)|} \left[ \left| \frac{\overline{M}^2}{\overline{M}^2 - 1} + \widehat{L}(j\omega) \right| - \frac{\overline{M}}{\overline{M}^2 - 1} \right]. \quad (3.30)$$

**Důkaz:** Z obr. 3.4 plyne, že podmínka

$$M_{CL} < \overline{M}, \quad (3.31)$$

kde  $M_{CL}$  je M-index uzavřené smyčky s přenosem řízeného systému  $F(s)$  a  $\overline{M} \geq 1$  je ekvivalentní s podmínkou

$$|L(j\omega) - \widehat{L}(j\omega)| \leq |X + \widehat{L}(j\omega)| - R \quad (3.32)$$

neboli

$$\frac{|L(j\omega) - \widehat{L}(j\omega)|}{|\widehat{L}(j\omega)|} \leq \frac{|X + \widehat{L}(j\omega)|}{|\widehat{L}(j\omega)|} - \frac{R}{|\widehat{L}(j\omega)|} \quad (3.33)$$

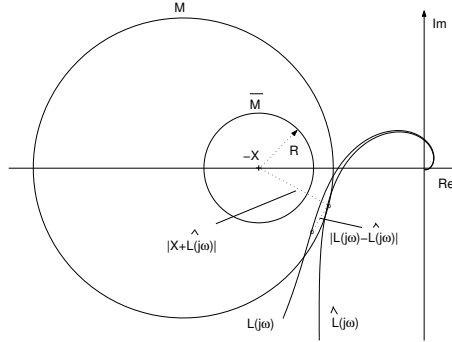
a po úpravě

$$|F(j\omega) - \widehat{F}(j\omega)| \leq \frac{|\widehat{F}(j\omega)|}{|\widehat{L}(j\omega)|} (|X + \widehat{L}(j\omega)| - R). \quad (3.34)$$

Dosazením ze (3.14) a (3.15) dostaneme

$$|F(j\omega) - \widehat{F}(j\omega)| \leq \frac{|\widehat{F}(j\omega)|}{|\widehat{L}(j\omega)|} \left[ \left| \frac{\overline{M}^2}{\overline{M}^2 - 1} + \widehat{L}(j\omega) \right| - \frac{\overline{M}}{\overline{M}^2 - 1} \right]. \quad (3.35)$$

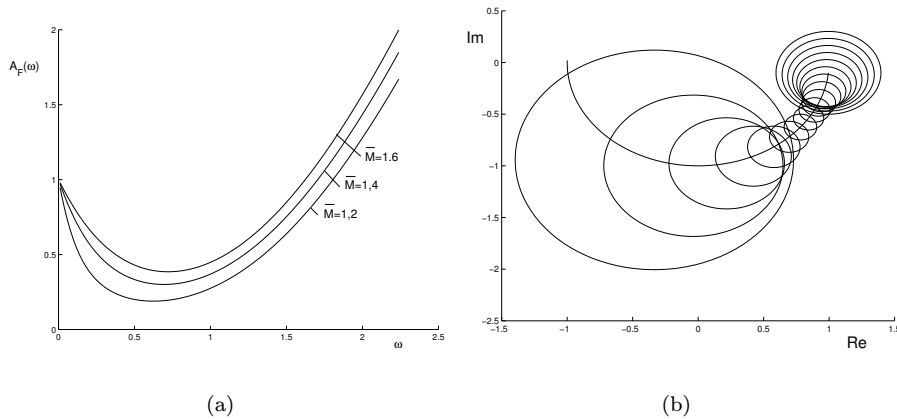
Odtud již plyne tvrzení věty 3.3.1. ■



Obrázek 3.4: Analýza robustnosti

Toleranční funkce  $A_F(\omega)$  definovaná vztahem (3.30) udává přípustnou (maximální možnou) odchylku  $|F(j\omega) - \hat{F}(j\omega)|$ , při které  $M$ -index uzavřené smyčky nepřekročí ještě přípustnou hodnotu  $\bar{M}$ . Hodnotu  $A_F(\omega)$  pro dané  $\omega$  můžeme tedy interpretovat jako poloměr kruhu v komplexní rovině se středem v bodě  $\hat{F}(j\omega)$ , který vymezuje přípustné hodnoty  $F(j\omega)$ . Poznamenejme, že podmínka (3.30) vyjadřuje zobecnění známé podmínky robustní stability [17], kterou dostaneme z (3.30) limitním přechodem  $M \rightarrow +\infty$ .

**Příklad 2** Uvažujme  $\bar{F}(s) = e^{-sD}$ ,  $G(s) = \frac{1}{2Ds}$ , tj.  $G(s)$  je optimální I-regulátor získaný řešením  $M$ -úlohy,  $M = 1$  v příkladu 1. Průběh toleranční funkce  $A_F(\omega)$  pro hodnoty  $\bar{M} = 1, 2; 1, 4$  a  $1, 6$  je zobrazen na obr. 3.5. Toleranční kruhy pro  $\bar{M} = 1, 1$  v rovině  $F(j\omega)$  jsou znázorněny na obr. 3.5.



Obrázek 3.5: a) Toleranční funkce  $A_F$  pro  $\bar{M} = 1, 2; 1, 4$  a  $1, 6$ , b) toleranční kruhy v rovině  $F(j\omega)$  pro  $\bar{M} = 1, 1$

### 3.4 Řešení M–úlohy pro $M = 1$ a PI regulátor

V tomto oddíle budeme řešit M–úlohu pro  $M = 1$  a PI regulátor za předpokladu, že  $F(s)$  je obecný statický ( $a = 0$ ) stabilní systém a že frekvenční přenos  $F(j\omega)$  splňuje jisté další požadavky, které budou přesně specifikovány až v průběhu vlastního řešení M–úlohy. Omezení na případ, kdy návrhový parametr  $M$  má hodnotu 1, je z hlediska praxe velmi rozumné a navíc podstatným způsobem zjednodušuje řešení M–úlohy, neboť M–kružnice v tomto případě degeneruje na M–přímku. Případem  $M > 1$  se budeme stručně zabývat v následujícím oddíle.

Pro účely nalezení explicitního řešení M–úlohy v obecném případě položíme

$$F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (3.36)$$

kde  $A(\omega) = \operatorname{Re} F(j\omega)$  a  $B(\omega) = \operatorname{Im} F(j\omega)$  jsou po řadě reálné funkce reálné proměnné  $\omega$ . Frekvenční přenos  $G(j\omega)$  PI regulátoru předpokládejme ve tvaru

$$G(j\omega) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} \right), \quad (3.37)$$

kde  $K > 0$  a  $T_i > 0$  jsou hledané parametry. Přenos otevřené smyčky je tedy

$$L(j\omega) = K \left\{ \left[ A(\omega) + \frac{1}{T_i \omega} B(\omega) \right] + j \left[ B(\omega) - \frac{1}{T_i \omega} A(\omega) \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Podmínka b) M–úlohy je pro případ  $M = 1$  ekvivalentní s požadavkem, aby Nyquistova křivka  $L(j\omega)$  ležela celá v pravé polorovině komplexní roviny vymezené M–přímkou a alespoň v jednom bodě se jí dotýkala, tak jak je zobrazeno na obr. 3.6. Předpokládejme, že bod dotyku křivky  $L(j\omega)$  a M–přímky odpovídá frekvenci  $\omega_t$ . Potom zřejmě platí

$$\inf_{\omega} \operatorname{Re} L(j\omega) = \operatorname{Re} L(j\omega_t) = -\frac{1}{2} \quad (3.39)$$

a tedy též

$$\left. \frac{d}{d\omega} \operatorname{Re} L(j\omega) \right|_{\omega=\omega_t} = 0. \quad (3.40)$$

Odtud a použitím (3.38) dostaneme podmínku

$$A'(\omega_t) + \frac{1}{T_i \omega_t} \left[ B'(\omega_t) - \frac{1}{\omega_t} B(\omega_t) \right] = 0 \quad (3.41)$$

neboli

$$T_i = T_i(\omega_t) = \frac{\frac{1}{\omega_t} B(\omega_t) - B'(\omega_t)}{\omega_t A'(\omega_t)}. \quad (3.42)$$

Z (3.39) použitím (3.38) a (3.42) dostaneme

$$K = K(\omega_t) = \frac{B'(\omega_t) - \frac{1}{\omega_t} B(\omega_t)}{2 \left\{ A(\omega_t) \left[ \frac{1}{\omega_t} B(\omega_t) - B'(\omega_t) \right] + A'(\omega_t) B(\omega_t) \right\}}. \quad (3.43)$$

Vztahy (3.42) a (3.43) vyjadřují tedy nutnou podmínku, kterou musí splňovat parametry  $K$  a  $T_i$ , aby se křivka  $L(j\omega)$  dotýkala M–přímky na frekvenci  $\omega_t$ .

Jestliže nyní určíme  $T_i$  a  $K$  podle vztahů (3.42) a (3.43) pro zvolenou frekvenci  $\omega_t$ , obrácením výše uvedeného postupu zjistíme, že se křivka  $L(j\omega)$  dotýká M–přímky na frekvenci  $\omega_t$ . Jsou-li navíc určené hodnoty  $T_i$  a  $K$  kladné a je-li příslušná uzavřená smyčka stabilní, potom budeme o těchto hodnotách  $T_i$  a  $K$  hovořit jako o suboptimálním řešení M–úlohy. Nyní přejdeme od suboptimálního řešení k optimálnímu vhodným výběrem frekvence dotyku. Optimální frekvenci dotyku  $\omega_t^*$  určíme z podmínky a) M–úlohy. Označme

$$I(\omega) = \frac{T_i(\omega)}{K(\omega)}, \quad (3.44)$$

kde  $T_i(\omega)$  a  $K(\omega)$  jsou funkce definované pomocí vztahů (3.42) a (3.43). Z (3.11) plyne, že

$$\inf_{\omega} I(\omega) = I(\omega_t^*). \quad (3.45)$$

Derivováním (3.44) a použitím (3.42) a (3.43) po úpravě dostaneme

$$I'(\omega) = -\frac{2A(\omega)\eta(\omega)}{\omega^3[A'(\omega)]^2}, \quad (3.46)$$

kde

$$\eta(\omega) = \omega^2[A''(\omega)B'(\omega) - A'(\omega)B''(\omega)] + \omega[2A'(\omega)B'(\omega) - A''(\omega)B(\omega)] - 2A'(\omega)B(\omega) \quad (3.47)$$

Předpokládejme nyní, že platí

$$\eta(\omega) > 0; \quad \forall \omega > 0, \quad (3.48)$$

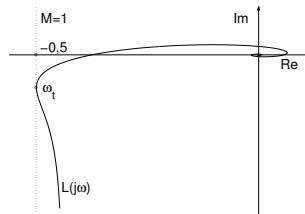
potom nutná podmínka lokálního extrému funkce  $I(\omega)$

$$I'(\omega) = 0 \quad (3.49)$$

je na intervalu  $(0; +\infty)$  ekvivalentní s podmínkou

$$A(\omega) = 0. \quad (3.50)$$

Odtud, z podmínky stability uzavřené smyčky a ze vztahu (3.46), vyplývá, že kandidátem na optimální frekvenci dotyku  $\omega_t^*$  je nejnižší frekvence  $\omega$  splňující podmínku (3.50). Takovou frekvenci budeme označovat  $\omega_{90}$ , protože fázové zpoždění  $F(j\omega)$  na této frekvenci je  $90^\circ$ . Snadno pomocí (3.46) ověříme, že  $\omega_t^* = \omega_{90}$



Obrázek 3.6: Grafické vyjádření podmínky b) M–úlohy pro  $M = 1$

je za předpokladu  $A'(\omega_{90}) < 0$  skutečně optimální frekvence dotyku, tj. že



platí (3.45). Dokázali jsme tedy, že za uvedených předpokladů jsou optimální parametry  $T_i^*$  a  $K^*$  PI-regulátoru dány vztahy

$$T_i^* = T_i(\omega_{90}) \quad (3.51)$$

$$K^* = K(\omega_{90}), \quad (3.52)$$

kde  $T_i(\omega)$  a  $K(\omega)$  jsou dříve definované funkce (3.42) a (3.43). Poznamenejme, že uvedený způsob odvození je správný pouze za předpokladu, že není možný dotyk mezi  $L(j\omega)$  a  $M$ -přímkou ve dvou a více bodech současně pro žádné hodnoty parametrů  $T_i$  a  $K$ . V případě, kdy by takový předpoklad neplatil, nelze hledat  $\inf_{\omega} I(\omega)$  zde použitou diferenciální metodou. Naštěstí je možné ukázat, že již dříve zavedený předpoklad (3.48) vícenásobný dotyk vylučuje. Platí totiž

$$T_i'(\omega) = \frac{\eta(\omega)}{\omega^3 [A'(\omega)]^2} \quad (3.53)$$

a z platnosti (3.48) plyne, že funkce  $T_i(\omega)$  je rostoucí funkce na intervalu  $(0; \bar{\omega})$ , kde  $\bar{\omega} > 0$  je nejmenší frekvence splňující podmínku  $A'(\bar{\omega}) = 0$ . Pro danou hodnotu  $T_i$  existuje tudíž maximálně jedna frekvence  $\omega \in (0, \bar{\omega})$ , pro kterou platí  $T_i = T_i(\omega)$ . Dále ze (3.42) plyne, že dotyk na frekvenci  $\omega > \bar{\omega}$  při splnění podmínky  $T_i(\omega) > 0$  a podmínky stability není možný.

Získané poznatky můžeme nyní shrnout do následující věty vyjadřující první hlavní výsledek této kapitoly.

**Věta 3.4.1.** *Nechť  $F(s)$  je stabilní statický systém a  $F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ . Dále předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky:*

- pro libovolné  $\omega > 0$  platí  $\eta(\omega) > 0$ , kde  $\eta(\omega)$  je funkce definovaná vztahem (3.47);*
- existuje frekvence  $\omega_{90}$ , která je definovaná jako nejmenší  $\omega$  splňující podmínku  $A(\omega) = 0$ ;*
- platí  $B(\omega_{90}) < 0$ ,  $A'(\omega_{90}) < 0$ ,  $\frac{1}{\omega_{90}}B(\omega_{90}) - B'(\omega_{90}) < 0$ . Potom existuje jediné řešení  $M$ -úlohy pro  $M = 1$  a PI-regulátor s přenosem  $G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$  dané vztahy*

$$K^* = \frac{B'(\omega_{90}) - \frac{1}{\omega_{90}}B(\omega_{90})}{2A'(\omega_{90})B(\omega_{90})} \quad (3.54)$$

$$T_i^* = \frac{\frac{1}{\omega_{90}}B(\omega_{90}) - B'(\omega_{90})}{\omega_{90}A'(\omega_{90})}. \quad (3.55)$$

**Příklad 3** Nechť

$$F(s) = K_0 \frac{\tau s + 1}{as^2 + bs + 1}, \quad (3.56)$$

kde  $a, b > 0$ ,  $\tau < \frac{a}{b}$  a  $\xi = \frac{b}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{2}$ , potom lze přímým výpočtem ověřit, že podmínky věty 3.4.1 jsou splněny. Frekvence  $\omega_{90}$  je dána vztahem

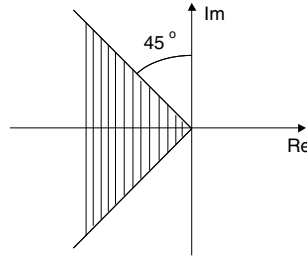
$$\omega_{90} = \frac{1}{\sqrt{a - b\tau}} \quad (3.57)$$

a příslušné optimální parametry PI-regulátoru jsou následující

$$K^* = \frac{b[a(b + \tau) - b^2\tau]}{2K_0(a - b\tau)^2} \quad (3.58)$$

$$T_i^* = \frac{a(b + \tau) - b^2\tau}{a - b\tau}. \quad (3.59)$$

Nyní budeme krátce diskutovat význam věty 3.4.1. Podmínky b) a c) věty 3.4.1 lze v konkrétním případě snadno ověřit. Týkají se totiž existence  $\omega_{90}$  a vlastností  $F(j\omega)$  v okolí  $\omega_{90}$ , a navíc jsou pro všechny „rozumné“ statické přenosy  $F(s)$  splněny. Poněkud komplikovanější je podmínka a) vyjadřující právě tu globální



Obrázek 3.7: Přípustný sektor kořenů polynomu  $P(s)$

vlastnost  $F(j\omega)$ , která podstatným způsobem zjednodušuje řešení M-úlohy pro  $M = 1$ . Je-li totiž tato podmínka splněna, stačí znát  $F(j\omega)$  pouze na úzkém intervalu frekvencí kolem  $\omega_{90}$ , abychom mohli určit čtyři „charakteristická“ čísla  $\omega_{90}$ ,  $B(\omega_{90})$ ,  $A'(\omega_{90})$  a  $B'(\omega_{90})$  a pomocí nich hledané optimální parametry  $K^*$  a  $T_i^*$ . Jinými slovy podmínka a) vymezuje situaci, kdy pro exaktní výpočet optimálního PI regulátoru není nutné znát „univerzální“ model řízeného systému, ale postačuje znalost mnohem jednoduššího čtyřparametrového „návrhově orientovaného“ modelu.

Nyní ukážeme, že podmínka a) věty 3.4.1 je splněna pro velmi širokou třídu systémů zahrnující všechny obvyklé případy, se kterými se setkáváme v průmyslové praxi.

**Lemma 3.4.1.** *Podmínka a) věty 3.4.1 je splněna pro libovolný přenos systému  $F(s)$  ve tvaru*

$$F(s) = \frac{K_0}{p(s)}, \quad (3.60)$$

kde  $K_0 > 0$  a  $p(s)$  je stabilní polynom, jehož všechny kořeny leží v sektoru vyznačeném na obr.3.7.

Důkaz lemmatu 3.4.1 lze provést přímým, avšak velmi komplikovaným výpočtem. Z důvodu stručnosti je vypuštěn.

Třídu systémů vyhovujících podmínce a) věty 3.4.1 je možné dále rozšířit na přenosy  $F(s)$  ve tvaru

$$F(s) = \frac{K_0}{p(s)} e^{-Ds}, \quad (3.61)$$

kde  $K_0 > 0$  a  $p(s)$  splňují předpoklady lemmatu 3.4.1 a  $D > 0$ , neboť

$$e^{-Ds} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{D}{n}s + 1\right)^n} \quad (3.62)$$

a splnění podmínky a) věty 3.4.1 plyne z lemmatu 3.4.1 limitním přechodem.

Na základě tohoto výsledku můžeme zmodifikovat větu 3.4.1 do následující podoby, která je mnohem výhodnější pro využití v praxi.

**Věta 3.4.2.** *Nechť  $F(s)$  je ve tvaru*

$$F(s) = \frac{K_0 e^{-Ds}}{\prod_{i=1}^{n_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\xi_k \Omega_k s + \Omega_k^2)}, \quad (3.63)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $D \geq 0$ ,  $\tau_i > 0$  pro  $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $\Omega_k > 0$  a  $\xi_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  pro  $k = 1, 2, \dots, n_2$  a nechť je buď  $n_1 + 2n_2 > 1$ , nebo  $D > 0$ . Potom existuje jediné řešení  $M$ -úlohy pro  $M = 1$  a  $PI$  regulátor s přenosem  $G(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$  dané vztahy (3.54) a (3.55), kde  $A(\omega) \triangleq \operatorname{Re} F(j\omega)$ ,  $B(\omega) \triangleq \operatorname{Im} F(j\omega)$  a  $\omega_{90}$  je nejmenší  $\omega > 0$  splňující podmínku  $A(\omega) = 0$ . Navíc vztahy (3.42) a (3.43) určují suboptimální řešení  $M$ -úlohy,  $M = 1$ , pro libovolné  $\omega_t < \bar{\omega}$ , kde  $\bar{\omega}$  je nejmenší  $\omega > 0$  splňující podmínku  $A'(\omega) = 0$ .

**Důkaz:** Vyplyvá bezprostředně z věty 3.4.1 a lemmatu 3.4.1. ■

**Příklad 4** Nechť  $F(s) = e^{-Ds}$ , potom jsou splněny předpoklady věty 3.4.2,  $\omega_{90} = \frac{\pi}{2D}$  a  $\bar{\omega} = \frac{\pi}{D}$ . Suboptimální řešení  $M$ -úlohy,  $M = 1$ , je dáno vztahy

$$T_i(\omega_t) = \frac{1}{D\omega_t^2} - \frac{\cot D\omega_t}{\omega_t} \quad (3.64)$$

$$K(\omega_t) = \frac{D\omega_t \cos D\omega_t - \sin D\omega_t}{-2D\omega_t + \sin 2D\omega_t}, \quad (3.65)$$

kde  $\omega_t \in (0, \bar{\omega})$ . Grafy funkcí  $T_i(\omega_t)$  a  $K(\omega_t)$  jsou pro případ  $D = 1$  zobrazeny na obr.3.8a. Na obr. 3.8b je zobrazena závislost kritéria kvality řízení

$$I(\omega_t) = \frac{T_i(\omega_t)}{K(\omega_t)} \quad (3.66)$$

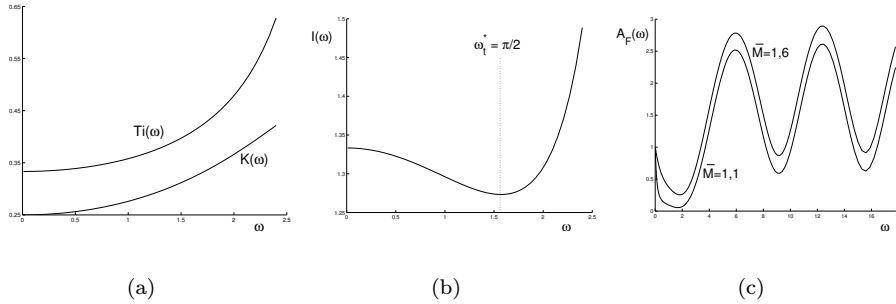
na frekvenci dotyku  $\omega_t$ . V souladu s tvrzením věty 3.4.2 nabývá  $I(\omega_t)$  svého minima pro  $\omega_t^* = \omega_{90} = \frac{\pi}{2D}$ . Optimální řešení získáme z (3.64) a (3.65) dosazením za  $\omega_t = \frac{\pi}{2D}$ . Dostaneme

$$K^* = \frac{1}{\pi} \quad (3.67)$$

$$T_i^* = \frac{4D}{\pi^2}. \quad (3.68)$$

Průběh toleranční funkce  $A_F(\omega)$  pro optimální  $PI$  regulátor a přípustnou hranici  $M$ -indexu uzavřené smyčky  $\bar{M} = 1, 1$  a  $\bar{M} = 1, 6$  je zobrazen na obr.3.8c.

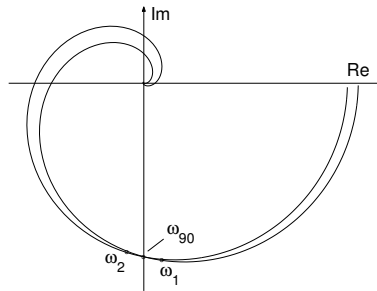
Na základě předchozích výsledků lze zformulovat prototypový algoritmus automatického optimálního nastavování  $PI$  regulátoru ze znalosti dvou bodů frekvenční charakteristiky řízeného systému.



Obrázek 3.8: a) Suboptimální řešení  $T_i(\omega_t)$  a  $K(\omega_t)$ ; b) kritérium kvality řízení  $I(\omega_t)$ ; c) toleranční funkce  $A_F(\omega)$  pro  $\bar{M} = 1,1$  a  $\bar{M} = 1,6$

**Prototypový algoritmus** (M-úloha,  $M = 1$ , PI regulátor):

1. Určíme dva body frekvenční charakteristiky řízeného systému  $F(j\omega_i) = A_i + jB_i$ ,  $i = 1, 2$  odpovídající frekvencím  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , které jsou blízké frekvenci  $\omega_{90}$  a pro které platí  $\omega_1 < \omega_{90} < \omega_2$ .



Obrázek 3.9: Aproximace  $F(j\omega)$  lokálním modelem  $F_M(j\omega)$

2. Z hodnot  $\omega_1, A_1, B_1, \omega_2, A_2$  a  $B_2$  získaných v kroku 1 určíme lokálním modelem  $F_M(s)$ , (obr.3.9) tak, aby platilo

$$F_M(j\omega_i) = A_i + jB_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.69)$$

3. Pomocí lokálního modelu  $F_M(s)$  určíme odhady hodnot  $\omega_{90}$ ,  $A(\omega_{90})$ ,  $A'(\omega_{90})$ ,  $B(\omega_{90})$  a  $B'(\omega_{90})$  příslušející přenosu  $F(j\omega)$ . Tyto odhady označme po řadě  $\hat{\omega}_{90}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{A}'$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{B}'$ .

4. Parametry optimálního PI regulátoru určíme podle vztahů

$$\hat{K} = \frac{\hat{B}' - \frac{1}{\hat{\omega}_{90}}\hat{B}}{2\hat{A}'\hat{B}} \quad (3.70)$$

$$\hat{T}_i = \frac{\frac{1}{\omega_{90}}\hat{B} - \hat{B}'}{\hat{\omega}_{90}\hat{A}'} \quad (3.71)$$

Pro účely lokálního modelu lze s výhodou použít přenos (3.56) z příkladu 2, jehož čtyři neznámé parametry mohou být jednoznačně určeny z podmínky (3.69).

### 3.5 Řešení M–úlohy pro $M > 1$ a PI regulátor

V této kapitole velmi stručně naznačíme způsob řešení M–úlohy pro  $M > 1$  a PI regulátor. Necht bod dotyku křivky  $L(j\omega)$  a M–kružnice odpovídá frekvenci  $\omega_t$ , potom platí

$$\sup_{\omega} |Q(j\omega)|^2 = \frac{|L(j\omega_t)|^2}{|1 + L(j\omega_t)|^2} = M^2, \quad (3.72)$$

kde  $L(j\omega)$  je přenos otevřené smyčky (3.38). Protože  $|Q(j\omega)|^2$  nabývá maxima na frekvenci  $\omega_t$ , platí

$$\frac{d}{d\omega} |Q(j\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_t} = 0. \quad (3.73)$$

Z podmínky (3.73) lze určit zesílení regulátoru

$$K = f[\omega_t, A(\omega_t), A'(\omega_t), B(\omega_t), B'(\omega_t), T_i]. \quad (3.74)$$

Dosazením za  $K$  podle (3.74) do (3.72) a následujícími úpravami dostaneme rovnici

$$c_4 T_i^4 + c_3 T_i^3 + c_2 T_i^2 + c_1 T_i + c_0 = 0 \quad (3.75)$$

pro neznámou  $T_i$ , kde  $c_k = c_k[\omega_t, A(\omega_t), A'(\omega_t), B(\omega_t), B'(\omega_t), M^2]$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4$ . Rovnice (3.75) vyjadřuje nutnou podmínku pro dotyk křivky  $L(j\omega)$  a M–kružnice na frekvenci  $\omega_t$ . Obráceně, necht

$$T_i = T_i(\omega_t) = f_{T_i}[\omega_t, A(\omega_t), A'(\omega_t), B(\omega_t), B'(\omega_t), M^2] \quad (3.76)$$

je kladný kořen rovnice (3.75) pro zvolenou  $\omega_t$ . Dosazením do (3.74) za  $T_i$  podle (3.76) dostaneme

$$K = K(\omega_t) = f_K[\omega_t, A(\omega_t), A'(\omega_t), B(\omega_t), B'(\omega_t), M^2]. \quad (3.77)$$

Jestliže je  $T_i > 0$ ,  $K > 0$  a příslušná uzavřená smyčka je stabilní, potom vztahy (3.76) a (3.77) udávají suboptimální řešení M–úlohy (tj. je splněna podmínka b) M–úlohy). Optimální řešení nyní určíme tak, že nalezneme optimální frekvenci dotyku  $\omega_t^*$  z podmínky

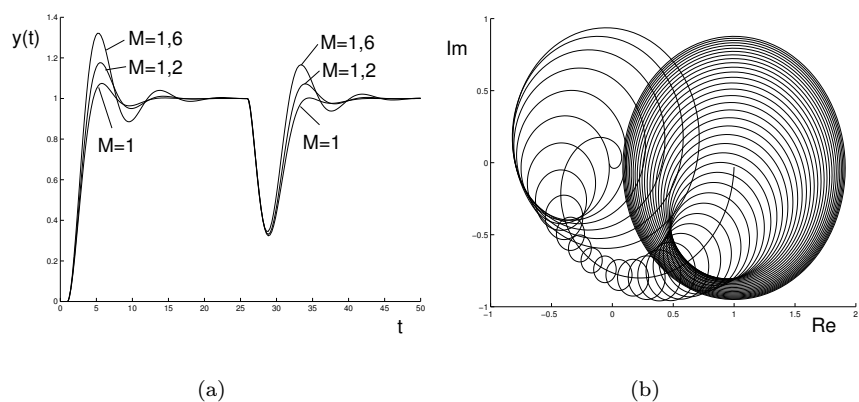
$$\inf_{\omega_t} \frac{T_i(\omega_t)}{K(\omega_t)} = \frac{T_i(\omega_t^*)}{K(\omega_t^*)}, \quad (3.78)$$

kde  $T_i(\omega_t)$  a  $K(\omega_t)$  jsou suboptimální parametry dané vztahy (3.76) a (3.77). Pro počáteční odhad  $\omega_t^*$  můžeme použít frekvenci  $\omega_{90}$ . Je-li  $M \leq 1,6$ , potom pro systémy s přenosem  $F(s)$  splňující předpoklady věty 3.4.2 je obvykle  $\omega_{90} < \omega_t^* < \omega_{130}$ . Pro řešení M–úlohy v tomto případě stačí tedy znát pouze lokální model ve frekvenčním pásmu  $\langle \omega_{90}; \omega_{130} \rangle$ .

**Příklad 5** Necht  $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$ . Řešení M–úlohy pro různé hodnoty návrhového parametru jsou uvedena v tab. 3.5. Odezvy uzavřené smyčky s optimálním PI regulátorem ( $M = 1; 1,2$  a  $1,6$ ) pro skokovou změnu požadované hodnoty  $w$  a poruchy  $d$  jsou zobrazeny na obr. 3.10a. Na obr. 3.10b jsou znázorněny toleranční kruhy v rovině  $F(j\omega)$  pro optimální PI regulátor,  $M = 1$  a  $\overline{M} = 1,2$ .

M	$K^*$	$T_i^*$	$\arg F(j\omega_t^*) [^\circ]$
1,00	0,686	1,884	-90,0
1,10	0,699	1,748	-95,2
1,20	0,716	1,655	-99,1
1,40	0,752	1,537	-104,9
1,60	0,788	1,464	-108,9

Tab.3.5 Řešení M-úlohy pro různé hodnoty návrhového parametru



Obrázek 3.10: a) Odezva na skokovou změnu požadované hodnoty  $w$  a poruchy  $d$  pro optimální PI regulátor,  $M = 1; 1,2$  a  $1,6$ ; b) toleranční kruhy v rovině  $F(j\omega)$  pro optimální regulátor,  $M = 1$ ,  $\bar{M} = 1,2$

## Kapitola 4

# Úloha robustního návrhu regulátoru

*V této kapitole budeme definovat obecnou úlohu robustního návrhu regulátoru pro jednoduchou regulační smyčku, která se odlišuje od návrhové úlohy (tzv. M-úlohy) z předchozí kapitoly především tím, že model procesu v podobě nominálního přenosu je nahrazen celou množinou (neboli množinovým modelem) přípustných systémů, které vyhovují dostupným informacím o řízeném systému. Numerické řešení takto postavené úlohy je vzhledem k obvykle vysoké dimenzi množinového modelu procesu velmi obtížné. Ukážeme však, že v některých speciálních případech lze obtížnost řešení dramaticky snížit nahrazením množiny přípustných systémů její tzv. reprezentativní podmnožinou, která má dimenzi jedna.*

### 4.1 Úvod

Převážná většina teoreticky podložených procedur pro návrh regulátoru začíná větou: „Nechť je dán model řízeného systému...“. Pod tímto modelem se obvykle rozumí jediný přenos nebo jediný stavový model atd., který reprezentuje řízený systém. Často je nazýván nominálním modelem. V lepším případě je ještě doplněn jistými tolerančními funkcemi nebo tolerančními intervaly, které vymezují neurčitost modelu. Důležité však je, že se jedná o univerzální model v tom smyslu, že s jeho pomocí lze předvídat odezvu systému na libovolný vstup. Bohužel získání vyhovujícího modelu tohoto typu je v průmyslu velmi nákladné a většinou i obtížně proveditelné. Z tohoto důvodu jsou v průmyslu populární inženýrské metody, které univerzální model nahrazují problémově orientovaným modelem určeným pouze pro návrh regulátoru daného typu. Velmi často jde o model obsahující pouze soubor několika snadno měřitelných charakteristických čísel procesu. Poznamenejme, že převážná většina současných komerčních algoritmů automatického nastavování parametrů PID regulátorů pracuje s modely procesu tohoto typu [29].

Chceme-li podrobit inženýrské metody návrhu regulátorů objektivní analýze, je nutné je nejprve začlenit do teorie. Zdá se, že toto je možné jedině tehdy, opustíme-li myšlenku univerzálního modelu a nahradíme-li ji ideou množinového modelu zahrnujícího všechny přípustné systémy s danými charakteristickými

čísly. Idea množinového modelu, jako taková, není v žádném případě v teorii automatického řízení nová. V minulosti byla mnohokrát užita. V poslední době například v krásné teorii robustní stability intervalových systémů [32]. Spojení množinového přístupu s inženýrskými charakteristickými čísly, na které se dále soustředíme, se však zdá nové.

Všimněme si ještě pojmu robustního návrhu. Úloha robustního návrhu spočívá v nalezení takového regulátoru, který zajistí splnění stanovených požadavků pro libovolný systém patřící do množinového modelu procesu. Ze všech takových regulátorů následně vybíráme ten, který má minimální hodnotu optimalizačního kritéria.

## 4.2 Formulace problému

V tomto oddílu budeme definovat úlohu robustního návrhu regulátoru takovým způsobem, aby do svého rámce umožňovala zahrnout různé inženýrské empirické metody návrhu regulátorů založené na charakterizaci řízeného procesu pomocí několika charakteristických čísel. Hlavní odlišnost od návrhové úlohy zkoumané v předchozí kapitole spočívá v nahrazení jediného nominálního modelu procesu celou množinou přípustných systémů, které vyhovují dostupným inženýrským informacím o řízeném procesu.

### Přípustné regulátory

Symbolem  $\mathfrak{R}$  budeme označovat množinu přípustných regulátorů, do které patří všechny *ryzí* přenosy ve tvaru

$$G(s) = \frac{K}{T_i s} G_0(s), \quad (4.1)$$

kde  $K > 0, T_i > 0$  jsou parametry regulátoru a  $G_0(s)$  je stabilní přenos dané struktury splňující podmínku  $G_0(0) = 1$ . Předpokládáme, že přenos  $G_0(s)$  může obsahovat další parametry regulátoru s předem vymezenými přípustnými intervaly hodnot. Poznamenejme, že tvar přenosu (4.1) zahrnuje všechny obvyklé regulátory s integrační složkou používané v průmyslu (PI, PID, Smithův prediktor, atd.). Například pro PID regulátor s přenosem

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right)$$

je

$$G_0(s) = \frac{T_i T_d (1 + \frac{1}{N}) s^2 + (T_i + \frac{T_d}{N}) s + 1}{\frac{T_d}{N} s + 1}.$$

### Přípustné systémy

Symbolem  $\mathfrak{S}$  budeme označovat množinu přípustných přenosů  $F(s)$  řízeného systému. Tato množina může být definována různě. Některé konkrétní definice budou uvedeny a podrobně studovány v následujících kapitolách této práce. Vždy však budeme předpokládat, že množina  $\mathfrak{S}$  je určena informacemi dvojího druhu: 1) apriorní informací, která specifikuje tvar přenosu  $F(s)$ , jeho strukturální parametry, omezení na polohu pólů a případně další údaje; 2) informací



získanou měřením v identifikačním experimentu v podobě charakteristických čísel řízeného systému. (V této práci se však omezíme pouze na případ, kdy v identifikačním experimentu získáme jeden nebo dva body frekvenční charakteristiky řízeného systému.)

Pro účely této kapitoly budeme zatím předpokládat, že množina  $\mathfrak{S}$  je definována následovně:

$$\mathfrak{S} \triangleq \{F(s) = F(s, q) : q \in Q \subset \mathbb{R}^\nu\}, \quad (4.2)$$

kde  $F(s, q)$  je stabilní striktně ryzí racionální lomená funkce v proměnné  $s$ , jejíž koeficienty spojitě závisí na obecném vektorovém parametru  $q \in \mathbb{R}^\nu$ , množina  $Q$  je uzavřená podmnožina  $\mathbb{R}^\nu$  a určuje přípustné hodnoty parametru  $q$  tak, aby  $F(s, q)$  vyhovoval současně apriorní i měřením získané informaci. Jestliže je množina  $Q$  souvislá, budeme říkat, že souvislá je i množina  $\mathfrak{S}$  přípustných přenosů. Poznamenejme pro úplnost, že  $Q$  je souvislá množina, jestliže libovolné dva její body  $q_1$  a  $q_2$  lze spojit spojitou křivkou ležící v  $Q$ .

### Bezpečnost ve stabilitě

Bezpečnost ve stabilitě může být definována různým způsobem. Pro zachování obecnosti ji definujeme jako relaci na kartézském součinu  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ . Dvojice  $(G(s), F(s))$  je prvkem relace  $\mathfrak{L}$  právě tehdy, jestliže regulační smyčka tvořená regulátorem  $G(s)$  a řízeným systémem  $F(s)$  splňuje danou podmínku bezpečnosti ve stabilitě. V této práci se však omezíme na následující konkrétní definici relace  $\mathfrak{L}$ :

*Dvojice  $(G(s), F(s))$  je prvkem  $\mathfrak{L}$  právě tehdy, jestliže frekvenční přenos otevřené smyčky*

$$L(j\omega) = G(j\omega)F(j\omega)$$

*neobkličuje a neprotíná  $M$ -kružnici pro daný návrhový parametr  $M \in (1, +\infty)$  (viz kap.3).*

Poznamenejme, že z uvedené definice  $\mathfrak{L}$  plyne, že  $\mathfrak{L}$  obsahuje právě ty dvojice  $(G(s), F(s))$ , pro které je uzavřená smyčka stabilní a maximální hodnota komplementární citlivostní funkce je omezena hodnotou  $M$ . Uzavřený kruh ohraničený  $M$ -kružnicí,  $M \geq 1$  budeme nazývat  $M$ -kruh a označovat symbolem  $\mathfrak{M}$ . Poznamenejme ještě, že správnost všech tvrzení uvedených v této kapitole zůstane zachována, použijeme-li alternativní definici bezpečnosti ve stabilitě vycházející z omezení maximální hodnoty  $M_s$  citlivostní funkce nebo současného omezení citlivostní i komplementární citlivostní funkce pomocí dvojice návrhových parametrů  $M$  a  $M_s$ .

### Kritérium optimality

Symbolem  $I$  budeme označovat kritérium optimality regulátoru ve tvaru

$$I(G(s)) \triangleq \frac{T_i}{K} \rightarrow \min, \quad (4.3)$$

kde  $K$  a  $T_i$  jsou parametry regulátoru (4.1). Zdůvodnění, proč volíme kritérium optimality právě v tomto tvaru, je uvedeno v předchozí kapitole. Zde poznamenejme pouze to, že kritérium (4.3) nezávisí na řízeném systému a že z tohoto

důvodu je velmi výhodné pro numerické řešení návrhové úlohy, kterou budeme dále definovat.

### Robustní návrh regulátoru

Nyní zavedeme dva důležité pojmy.

**Definice 4.2.1 (Robustní regulátor).** *Regulátor  $G(s) \in \mathfrak{R}$  je robustní (vzhledem k relaci  $\mathfrak{L}$ ), jestliže  $(G(s), F(s)) \in \mathfrak{L}$  pro všechny  $F(s) \in \mathfrak{S}$ . Tuto skutečnost budeme stručně zapisovat následovně  $(G(s), \mathfrak{S}) \subset \mathfrak{L}$ .*

**Definice 4.2.2 (Robustně optimální regulátor).** *Regulátor  $G^*(s) \in \mathfrak{R}$  je robustně optimální (vzhledem k relaci  $\mathfrak{L}$  a kritériu optimality  $I : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), jestliže  $G^*(s)$  je robustní (vzhledem k  $\mathfrak{L}$ ) a*

$$I(G^*(s)) = \inf_{(G(s), \mathfrak{S}) \subset \mathfrak{L}} I(G(s))$$

Nyní jsme již připraveni definovat obecnou úlohu robustního návrhu regulátoru (RNR).

**Úloha RNR:** *Je dána čtveřice  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}, I)$ , kde  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}$  a  $I$  mají výše uvedený význam. Nalezněte robustně optimální regulátor  $G^*(s) \in \mathfrak{R}$  vzhledem k relaci  $\mathfrak{L}$  a kritériu optimality  $I$ .*

Bohužel, numerické řešení takto postavené úlohy není jednoduché. Je to proto, že množina přípustných přenosů  $\mathfrak{S}$  obsahuje obecně nekonečně mnoho prvků a především má obvykle vysokou dimenzi. Užití metod doporučených pro takovéto případy jako je např. „mřížkování“, je velmi neefektivní, neboť vždy brzy narazíme na „prokletí dimenze“. Naštěstí úloha RNR je zformulována tak, že ji lze v některých speciálních případech výrazně zjednodušit.

## 4.3 Zjednodušení úlohy RNR

Hlavní myšlenka zjednodušení úlohy RNR je následující:  $\nu$ -dimenzionální množinu přípustných systémů  $\mathfrak{S}$  promítneme pomocí zobrazení  $\mathfrak{S} \ni F(s) \mapsto F(j\omega)$  do komplexní roviny  $\mathbb{C}$ . Obdržíme tak obor hodnot  $\mathcal{F}(j\omega)$ , který reprezentuje jakýsi zobecněný bod frekvenční charakteristiky množinového modelu  $\mathfrak{S}$ . Nyní lze ukázat, že pro řešení úlohy RNR jsou významné pouze ty přípustné přenosy, které se zobrazí alespoň pro jedno  $\omega$  na hranici množiny  $\mathcal{F}(j\omega)$ . Pro přesnější formulaci a důkaz tohoto principu zavedme následující pojmy.

### Obor hodnot

Obor hodnot všech přípustných přenosů  $F(s) \in \mathfrak{S}$  pro hodnotu  $s = j\omega$  označme symbolem  $\mathcal{F}(j\omega)$ .  $\mathcal{F}(j\omega)$  je zřejmě množina v komplexní rovině  $\mathbb{C}$ . (V našem případě bude  $\mathcal{F}(j\omega)$  vždy jednoduše souvislá omezená oblast.) Symbolem  $\partial\mathcal{F}(j\omega)$  označme hranici neboli množinu všech krajních bodů množiny  $\mathcal{F}(j\omega)$ . Poznamenejme, že obor hodnot  $\mathcal{F}(j\omega)$  pro nás bude centrální pojem. Jeho význam lze nahlédnout ze skutečnosti, že  $\mathcal{F}(j\omega)$  jako dvojdimenzionální množina reprezentuje typicky vysokodimenzionální množinový model  $\mathfrak{S}$ .

**Definice 4.3.1 (extremální přenos).** *Nechť  $z \in \partial\mathcal{F}(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$  a  $F(j\omega) = z$  pro  $F(s) \in \mathfrak{S}$ , potom přenos  $F(s)$  budeme nazývat *extremálním přenosem* množiny  $\mathcal{F}(j\omega)$ . Množinu všech extremálních přenosů množiny  $\mathcal{F}(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$  budeme označovat symbolem  $\mathfrak{E}_\omega$ .*

**Definice 4.3.2 (reprezentativní podmnožina  $\mathfrak{S}$ ).** *Nechť pro libovolné  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$  a libovolný  $z \in \partial\mathcal{F}(j\omega)$  existuje přenos  $F(s) \in \mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}$  takový, že  $F(j\omega) = z$ , potom množinu  $\mathfrak{E}$  budeme nazývat *reprezentativní podmnožinou* množiny  $\mathfrak{S}$ .*

Poznamenejme, že definujeme-li

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{\omega \in \langle 0, +\infty \rangle} \mathfrak{E}_\omega,$$

potom množina  $\mathfrak{E}$  je zřejmě reprezentativní podmnožina množiny  $\mathfrak{S}$ . V některých speciálních, avšak pro nás důležitých případech dále ukážeme, že přímo množina  $\mathfrak{E}_{\omega_0}$  pro víceméně libovolné  $\omega_0 > 0$  splňuje požadavky na reprezentativní podmnožinu množiny  $\mathfrak{S}$ . Dodejme, že v těchto případech je  $\mathfrak{E}_\omega$  s výjimkou konečného počtu hodnot  $\omega$  konstantní pro všechny  $\omega \geq 0$ .

### Princip reprezentativní podmnožiny

Nyní jsme připraveni vyslovit jednoduchý princip pro zjednodušení úlohy RNR spočívající v intuitivně zřejmém tvrzení: Zobecněná frekvenční charakteristika otevřené smyčky  $G(j\omega) \cdot \mathcal{F}(j\omega)$  neobkličuje a neprotíná danou  $M$ -kružnici právě tehdy, jestliže je tomu tak pro každý bod množiny  $G(j\omega) \cdot \partial\mathcal{F}(j\omega)$ . Přesnější formulaci uvádí následující lemma.

**Lemma 4.3.1.** *Nechť množina přípustných systémů  $\mathfrak{S}$  je souvislá, potom regulátor  $G(s) \in \mathfrak{R}$  je robustní vzhledem k relaci  $\mathfrak{L}$  právě tehdy, jestliže současně platí*

$$G(j0) \cdot \mathcal{F}(j0) \bigcap \mathfrak{M}^\circ = \emptyset \quad (4.4)$$

a

$$(G(s), \mathfrak{E}) \subset \mathfrak{L}, \quad (4.5)$$

kde  $\mathfrak{M}$  je  $M$ -kruh odpovídající návrhovému parametru  $M \geq 1$  a  $\mathfrak{E}$  je reprezentativní podmnožina množiny  $\mathfrak{S}$ .

**Důkaz:** 1. Nechť  $G(s) \in \mathfrak{R}$  je robustní vzhledem k relaci  $\mathfrak{L}$ , potom (4.4) platí, neboť množina  $G(j0)\mathcal{F}(j0)$  podle definice nesmí obsahovat žádné vnitřní body  $\mathfrak{M}$  a (4.5) platí, neboť  $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}$ .

2. Nechť platí (4.4) a (4.5). Rozlišíme dva případy:

(A) Nejprve předpokládejme, že existuje přípustný přenos  $F_1(s) \in \mathfrak{S}$ , pro který existuje  $\omega_1 \in (0, +\infty)$  takové, že  $L_1(j\omega_1) \triangleq G(j\omega_1)F_1(j\omega)$  je vnitřní bod kruhu  $\mathfrak{M}$  pro dané  $M$ . Zvolme nyní  $M_1 > M$  tak, že  $L_1(j\omega_1)$  je stále ještě vnitřní bod kruhu  $\mathfrak{M}_1$  příslušného k návrhovému parametru  $M_1$ . Poněvadž (podle definice  $M$ -kruhu)  $\mathfrak{M}_1$  obsahuje pouze vnitřní body  $\mathfrak{M}$ , z předpokladu (4.4) plyne

$$G(j0) \cdot \mathcal{F}(j0) \bigcap \mathfrak{M}_1 = \emptyset \quad (4.6)$$

a z předpokladu (4.5) plyne, že pro libovolný přenos  $F(s) \in \mathfrak{E}$  a libovolné  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$  je  $L(j\omega) \triangleq G(j\omega)F(j\omega)$  vnější bod kruhu  $\mathfrak{M}_1$ . Na druhé

straně z předpokladu  $L_1(j\omega_1) \in \mathfrak{M}_1^o$ , ze spojitě závislosti  $\mathcal{F}(j\omega)$  na  $\omega$  a z předpokladu (4.6) zřejmě plyne existence  $\omega_2 \in (0, \omega_1)$  a  $F_2(s) \in \mathfrak{E}$ , tak že  $L_2(j\omega_2) \triangleq G(j\omega_2)F_2(j\omega_2)$  leží na hranici  $\mathfrak{M}_1$ . Tím jsme však obdrželi spor, a tedy přenos  $F_1(s)$  uvedených vlastností neexistuje.

(B) Nyní předpokládejme, že existuje přípustný přenos  $F_3(s) \in \mathfrak{S}$  takový, že křivka  $L_3(j\omega) \triangleq G(j\omega)F_3(j\omega)$ ,  $\omega \in (0, +\infty)$  je disjunktní s kruhem  $\mathfrak{M}$ , avšak obkličuje kritický bod  $[-1, j0]$ . Přesněji řečeno: index  $i_3$  bodu  $[-1, j0]$  vzhledem k uzavřené křivce  $L_3(j\omega)$ ,  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  je větší než nula. Z předpokladu (4.5) však plyne, že pro libovolný  $F(s) \in \mathfrak{E}$  křivka  $L(j\omega) \triangleq G(j\omega)F(j\omega)$  neobkličuje kritický bod  $[-1, j0]$ . Zvolme nyní libovolný  $F_4(s) \in \mathfrak{E}$ . Poněvadž  $\mathfrak{S}$  je souvislá množina, existuje spojitě zobrazení  $(0, 1) \ni \alpha \mapsto F_5(s, \alpha)$  takové, že  $F_5(s, \alpha) \in \mathfrak{S}$  pro všechny  $\alpha \in (0, 1)$  a dále  $F_5(s, 0) = F_4(s)$  a  $F_5(s, 1) = F_3(s)$ . Probíhá-li tedy  $\alpha$  interval  $(0, 1)$  v kladném směru, mění se index bodu  $[-1, j0]$  vzhledem k křivce  $L_5(j\omega) \triangleq G(j\omega)F_5(j\omega, \alpha)$  z 0 na  $i_3 > 0$ . To však je zřejmě možné podle věty 2.3.1 jen tehdy, jestliže pro některé  $\alpha' \in (0, 1)$  prochází křivka  $L_5(j\omega, \alpha')$  kritickým bodem  $[-1, j0]$ . Odtud plyne, že existuje přípustný přenos  $F_1(s) \triangleq F_5(s, \alpha') \in \mathfrak{S}$ , pro který dále existuje  $\omega_1 \in (0, +\infty)$  takové, že  $L_1(j\omega) \triangleq G(j\omega_1)F_1(j\omega_1)$  je vnitřní bod kruhu  $\mathfrak{M}$  pro libovolné  $M \geq 1$ . Tímto jsme případ (B) převedli na případ (A). Odtud zřejmě plyne, že přenos  $F_3(s)$  uvedených vlastností neexistuje. Tím je důkaz proveden. ■

Lemma 4.3.1 říká, že pro ověření podmínky na bezpečnost ve stabilitě (zadané M–kružnicí) pro všechny přípustné systémy  $F(s) \in \mathfrak{S}$  stačí testovat pouze ty přenosy  $F(s)$ , které patří do reprezentativní podmnožiny  $\mathfrak{E}$  množiny  $\mathfrak{S}$ . Jestliže za  $\mathfrak{E}$  lze vzít množinu  $\mathfrak{E}_{\omega_0}$  pro některé  $\omega_0 > 0$ , potom je tato redukce velmi podstatná, neboť místo  $\nu$ –dimenzionální množiny  $\mathfrak{S}$  stačí testovat jednorozměrnou množinu  $\mathfrak{E}_{\omega_0}$ . Poznamenejme, že právě tento případ nastane pro množinové modely uvažované v následující kapitole. Stejně zjednodušení lze zřejmě použít i při řešení úlohy RNR.

**Definice 4.3.3.** *Budeme říkat, že úloha RNR daná čtveřicí  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}, I)$  je ekvivalentní s úlohou RNR danou čtveřicí  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{E}', \mathfrak{L}', I)$ , jestliže množiny robustně optimálních regulátorů příslušné k těmto úlohám jsou totožné.*

Následující věta je přímým důsledkem lemmatu 4.3.1.

**Věta 4.3.1.** *Nechť množina přípustných systémů  $\mathfrak{S}$  je souvislá, potom úlohy RNR dané čtveřicemi  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}, I)$  a  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{E}', \mathfrak{L}', I)$ , kde  $\mathfrak{E}'$  je reprezentativní podmnožina množiny  $\mathfrak{S}$  a  $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$  je definována následovně*

$$\mathfrak{L}' = \{(G(s), F(s)) \in \mathfrak{L} : G(s) \in \mathfrak{R}, F(s) \in \mathfrak{E}'\},$$

*jsou ekvivalentní.*

Na základě předchozí věty můžeme nyní zformulovat prototypový algoritmus řešení úlohy RNR:

### Prototypový algoritmus řešení úlohy RNR

Vstup: Čtveřice  $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{L}, I)$

Výstup: Robustně optimální regulátor  $G^*(s) \in \mathfrak{R}$

1. Určíme reprezentativní podmnožinu  $\mathfrak{E}$  množiny  $\mathfrak{S}$  mající co možná nejmenší dimenzi.

2. Nalezneme počáteční odhad regulátoru  $G_0(s) \in \mathfrak{R}$  takového, že pro všechny  $F(s) \in \mathfrak{E}$  platí  $(G_0(s), F(s)) \in \mathfrak{L}$ .

3. Některou numerickou metodou parametrické optimalizace řešíme optimalizační úlohu

$$I(G) \rightarrow \min$$

s vedlejšími podmínkami

$$\begin{aligned} G(s) &\in \mathfrak{R} \\ \forall F(s) \in \mathfrak{E} : (G(s), F(s)) &\in \mathfrak{L} \end{aligned}$$

Poznamenejme, že úloha RNR je obecně nekonvexní optimalizační úloha a úspěšnost jejího numerického řešení podstatným způsobem závisí na počátečním odhadu. Naštěstí pro konkrétní verze úloh RNR, které budeme dále uvažovat, lze získat dobré počáteční odhady pomocí výsledků obdržných v kap. 3.

## Kapitola 5

# Množinový model: frekvenční oblast

*V této kapitole pojednáme o novém typu množinového modelu procesu, který je motivován Zieglerovou–Nicholsovou frekvenční metodou. Množinový model je definován jako množina přípustných přenosů, které vyhovují informacím o řízeném systému dvojího druhu: apriorní informaci a informaci získané měřením v identifikačním experimentu. Apriorní informace určuje tvar přenosu procesu (v našem případě je to přenos bez nul) a omezení na polohu jeho pólů. Informace získaná měřením specifikuje několik málo bodů frekvenční charakteristiky. Hlavní výsledek této kapitoly je explicitní popis reprezentativní podmnožiny množiny všech přípustných systémů pro případ, kdy je znám jeden nebo dva body frekvenční charakteristiky. Z důvodu snazší srozumitelnosti základní myšlenkové linie jsou všechny důkazy zde uvedených tvrzení a další technické detaily přesunuty do speciální kapitoly věnované matematickým aspektům uvažovaného problému.*

### 5.1 Úvod

Nejprve stručně připomeňme Zieglerovu–Nicholsovou frekvenční metodu (ZNF). V ní je regulátor určován na základě předpokladu o monotónnosti přechodové charakteristiky procesu a znalosti jediného bodu jeho frekvenční charakteristiky. ZNF metoda tedy ve skutečnosti využívá jako svůj „problémově orientovaný“ model procesu informaci vzniklou spojením dvou typů informací. Za prvé jde o *apriorní informaci* o monotónnosti přechodové charakteristiky, a za druhé jde o *informaci získanou měřením* kritického bodu frekvenční charakteristiky. Snadno nahlédneme, že existuje nekonečně mnoho systémů, které současně vyhovují oběma těmito požadavkům. Nelze tedy stanovit jediný nominální model pro návrh regulátoru. ZNF metoda tento problém obchází tak, že nabízí heuristické vztahy pro přímý výpočet parametrů regulátoru obsahující pouze naměřená data. Tento přímý empirický přístup, eliminující jakýkoliv model, má však z teoretického hlediska jeden zásadní nedostatek. Neumožňuje totiž metodu exaktně analyzovat a vymezit, pro které procesy je vyhovující a pro které nikoliv. Zdá se, že navzdory v poslední době velkému zájmu o ZNF metodu není dosud objasněna ani otázka, pro kterou třídu lineárních systémů vede na sta-

bilní uzavřenou smyčku. Tato překvapivá skutečnost je způsobena zřejmě tím, že efektivní charakterizace všech lineárních systémů s monotónní přechodovou charakteristikou a frekvenční charakteristikou procházející zadaným bodem není v žádném případě jednoduchou záležitostí. Bez této charakterizace však zřejmě nelze jednoduše překlenout propast mezi inženýrskou empirií a přesnou teorií.

To je důvod, proč se budeme naznačeným problémem a jeho přirozeným zobecněním dále podrobně zabývat.

Předpokládejme, že řízený systém lze s dostatečnou přesností popsat přenosem  $F(s)$  ve tvaru

$$F(s) = \frac{K_0}{p(s)}, \quad (5.1)$$

kde  $K_0 > 0$  a  $p(s)$  je polynom stupně maximálně  $n$  s reálnými nezápornými koeficienty. Dále nechť je dopředu známo, že všechny kořeny polynomu  $p(s)$  jsou reálné a stabilní, tj. leží v intervalu  $(-\infty, 0)$  (jestliže navíc známe stupeň astatismu řízeného systému, můžeme přímo určit i násobnost pólu 0). Tato apriorní informace o řízeném systému nám vyděluje z množiny všech lineárních systémů relativně úzkou třídu „rozumných“ systémů. Systémy této třídy budeme nazývat apriorně přípustnými systémy. Poznamenejme, že do této třídy patří téměř všechny jednoduché inženýrské modely procesu [29]. Například nejčastěji užívaný model „systém prvního řádu s dopravním zpožděním“ lze vyjádřit ve tvaru (5.1) pro  $n \rightarrow \infty$ .

Přirozená je nyní otázka, kolik další informace o řízeném systému potřebujeme pro návrh vyhovujícího regulátoru. Pracujeme-li ve frekvenční oblasti, nabízí se změření jednoho, dvou či několika bodů frekvenční charakteristiky. Zde se však setkáme s dalším problémem: Jak volit příslušné frekvence tak, abychom získali právě tu informaci, která je pro náš cíl důležitá. Hlavní problém však spočívá v tom, jak získanou informaci zpracovat do podoby vhodné pro návrh regulátoru. Užijeme-li standardní přístup, potom některou interpolační nebo aproximační metodou určíme nominální model s předem víceméně náhodně zvolenou strukturou a obvykle nízkým počtem parametrů a dále pak již pracujeme pouze s jediným nominálním modelem. Bohužel, tento postup má celou řadu vážných nedostatků. Jedním z nich je volba vhodné struktury modelu. Ukazuje se totiž, že neexistuje žádný jednoduchý univerzální model vhodný pro většinu průmyslových procesů [30],[6], který by obsahoval pouze několik málo parametrů určitelných z experimentálně změřených dat. Z tohoto důvodu v naší struktuře modelu (5.1) připouštíme stupeň polynomu  $p(s)$  libovolně vysoký ( $n$  lze stanovit libovolně). Z toho ovšem plyne, že existuje nekonečně mnoho apriorně přípustných systémů, které interpolují naměřené body frekvenční charakteristiky. Efektivní charakterizace všech takovýchto přípustných systémů se zdá na první pohled neřešitelná. Naštěstí z předchozí kapitoly víme, že pro řešení úlohy RNR nám stačí znát pouze příslušnou reprezentativní podmnožinu množiny přípustných systémů. Hlavním výsledkem této kapitoly je úplná charakterizace příslušné reprezentativní podmnožiny pro případ, kdy známe jeden nebo dva body frekvenční charakteristiky.

## 5.2 Základní pojmy a označení

Symbolem  $\mathcal{S}$  budeme označovat množinu všech lineárních časově invariantních systémů s přenosem ve tvaru (5.1), kde  $K_0 > 0$  a  $p(s)$  je libovolný polynom s re-

álnými nezápornými koeficienty. Skutečnost, že daný přenos  $F(s)$  patří do množiny  $\mathcal{S}$ , budeme zapisovat následovně:  $F(s) \in \mathcal{S}$ .

Podmnožinu  $\mathcal{S}$  obsahující pouze přenosy ve tvaru (5.1), kde polynom  $p(s)$  je stupně maximálně  $n$ , budeme označovat  $\mathcal{S}^n$ . Podmnožinu  $\mathcal{S}$  resp.  $\mathcal{S}^n$  obsahující pouze přenosy (5.1), ve kterých kořeny polynomu  $p(s)$  leží v symetrické množině  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$ , budeme označovat  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  resp.  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n$ .

Nechť  $F_1, F_2, \dots, F_k \in \mathbb{C}$  a  $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , potom  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \dots; F_k, \omega_k)$  nebo zkráceně  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  označuje množinu všech přenosů  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n$ , které navíc splňují interpolační podmínky

$$F(j\omega_i) = F_i \quad (5.2)$$

$$-2\pi < \arg F(j\omega_i) \leq 0, \quad (5.3)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\arg F(j\omega_i)$  označuje celkový úhel, o který se otočí průvodič  $F(j\omega_i)$  kolem počátku komplexní roviny, jestliže  $\omega$  proběhne interval  $\langle 0, \omega_i \rangle$  v kladném směru. Podmínka (5.3) vyjadřuje požadavek, aby interpolační podmínky (5.2) přiřazovaly hodnoty frekvenční charakteristice  $F(j\omega)$  při prvním „oběhu“  $F(j\omega)$  kolem počátku a nikoliv při některém dalším. Poznamenejme ještě, že je-li  $\omega_1 = 0$ , potom má smysl uvažovat pouze reálné  $F_1 > 0$ .

Množina všech *přípustných systémů stupně maximálně  $n$*  je tedy definována vztahem

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \{F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n : F(s) \text{ splňuje (5.2) a (5.3)}\} \quad (5.4)$$

V případě, kdy nebudeme omezovat maximální stupeň přenosu, budeme hovořit o *množině všech přípustných systémů*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \quad (5.5)$$

V situacích, kdy bude zřejmé, kterou z množin (5.4) nebo (5.5) máme na mysli, budeme jednoduše hovořit pouze o *přípustných systémech*.

Množinu všech hodnot, které nabývají přenosy  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  v bodě  $s = j\omega$ ,  $\omega > 0$ , označme symbolem  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  tj.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \{F(j\omega) : F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)\} \quad (5.6)$$

a analogicky definujeme

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \quad (5.7)$$

Pro vyčlenění astatických systémů zavedme pro případ  $0 \in \mathcal{D}$  ještě následující označení

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D},m}^n \triangleq \{F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n : p(s) \text{ má } m\text{-násobný kořen } 0\} \quad (5.8)$$

Podobně

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D},m}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \{F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) : F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D},m}^n\} \quad (5.9)$$

a

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D},m}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \{F(j\omega) : F(s) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D},m}^n(\langle F_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)\} \quad (5.10)$$

Ve zbytku této kapitoly se omezíme na případ  $\mathcal{D} \triangleq \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ . Poznamenejme však, že v kap. 6 se budeme částečně zabývat i obecným případem.





vrcholy křivoúhelníka odpovídají přenosům ve tvaru (5.12), kde  $\tau_1 = \tau_2$ . Tedy přenosy odpovídající vrcholům mají maximálně dva různé póly a jsou ve tvaru

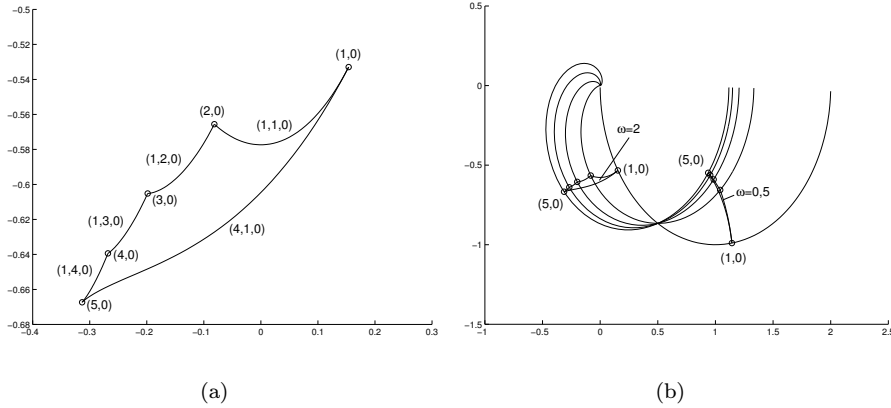
$$V_{(n_1, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m}, \quad (5.13)$$

kde  $K_0 > 0, \tau_1 \geq 0, n_1 \geq 1, m \geq 0$  a  $n_1 + m \leq n$ . Tomu odpovídá i příslušný popis vrcholů na obr.5.1 pomocí uspořádané dvojice  $(n_1, m)$ .

Všimněme si ještě množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ , kterou na obr. 5.1a představuje křivoúhelník s vrcholy  $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$ . Této množině odpovídají na rozdíl od zbytku množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  jak statické, tak i astatické přípustné přenosy. Na obr. 5.1b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky přípustných přenosů odpovídající vrcholům obou vyznačených křivoúhelníků.

### Příklad 2 ( $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ )

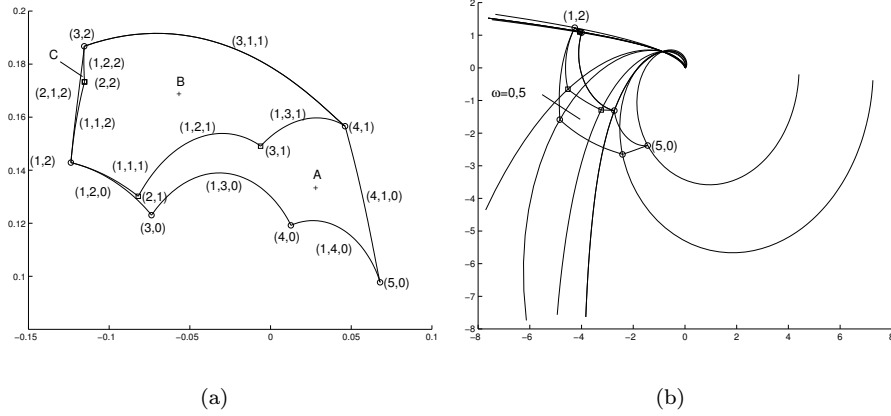
Nechť  $n = 5, \varphi = \frac{\pi}{3}, \omega = 2$ . Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je zobrazena na obr. 5.2a. Je to opět křivoúhelník, tentokrát však pouze s pěti vrcholy. Značení stran a vrcholů křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^5(e^{-j\frac{\pi}{3}}, 1; 2)$  má stejný význam jako v příkladu 1. Všimněme si, že poslední prvek uspořádaných trojic a dvojic je vždy 0, což značí, že hraniční body křivoúhelníka odpovídají pouze statickým systémům. Na obr. 5.2b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky odpovídající všem vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ .



Obrázek 5.2: a) Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^5(e^{-j\frac{\pi}{3}}, 1; 2)$ ; b) frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^5(e^{-j\frac{\pi}{3}}, 1; 2)$

### Příklad 3 ( $\varphi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ )

Nechť  $n = 5, \varphi = \frac{7\pi}{6}, \omega = 2$ . Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je zobrazena na obr. 5.3a. Zde jsou též vyznačeny křivoúhelníky  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-,2}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ . Poznamenejme, že např. pro vyznačený bod  $C$  existují odpovídající přípustné systémy se stupni astatickosti 0,1,2 avšak pro bod  $B$  existují přípustné systémy pouze se stupni astatickosti 0,1 a pro bod  $A$  jen se stupněm astatickosti 0. Na obr.5.3b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky odpovídající všem vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ .



Obrázek 5.3: a) Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(e^{-j\frac{7\pi}{6}}, 1; 2)$ ; b) frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům křivoúhelníků  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(e^{-j\frac{7\pi}{6}}, 1; 2)$

Z uvedených příkladů bychom mohli usoudit, že všechny přípustné přenosy, které mají více než dva nenulové póly, odpovídají vnitřním bodům množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ . Toto tvrzení, jak uvidíme dále, skutečně platí pro každé  $n$ , libovolné  $\varphi \in (0, 2\pi)$  a  $\omega > 0, \omega \neq 1$ . Úplnou charakterizaci hranice množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  nám poskytuje následující věta:

**Věta 5.3.1 (hranice  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ).** *Nechť  $r \triangleq \lfloor \frac{2\varphi}{\pi} \rfloor$ , potom množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , je křivoúhelník v komplexní rovině s  $n$  nebo  $n + 1$  vrcholy a stranami, které jsou určeny následovně.*

*Vrcholy:*

- (i) *Je-li  $r = 0$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n$  následujících (po sobě jdoucích) vrcholů:*

$$V_{(n,0)}(j\omega), V_{(n-1,0)}(j\omega), \dots, V_{(1,0)}(j\omega), \quad (5.14)$$

*kde  $V_{(k,0)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  je přípustný přenos daný vztahem*

$$V_{(k,0)}(s) = \frac{K_k}{(\tau_k s + 1)^k}, \quad (5.15)$$

*kde*

$$\begin{aligned} \tau_k &= \tan \frac{\varphi}{k} \\ K_k &= \left( \tan^2 \frac{\varphi}{k} + 1 \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

- (ii) *Je-li  $r > 0$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n + 1$  následujících (po sobě jdoucích) vrcholů:*

$$\begin{aligned} &V_{(n,0)}(j\omega), V_{(n-1,0)}(j\omega), \dots, V_{(r+1,0)}(j\omega), \\ &V_{(1,r)}(j\omega), V_{(n-r,r)}(j\omega), V_{(n-r+1,r-1)}(j\omega), \dots, V_{(n-1,1)}(j\omega), \end{aligned} \quad (5.16)$$

kde  $V_{(k,m)}(s)$  je přípustný přenos daný vztahem

$$V_{(k,m)}(s) = \frac{K_{km}}{(\tau_{km}s + 1)s^m}, \quad (5.17)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_{km} &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{k} \\ K_{km} &= \left( \tan^2 \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{k} + 1 \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Strany:

- (i) Je-li  $r = 0$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n$  stran (v kompatibilním pořadí s vrcholy (5.14)) určených křivkami

$$H_{(k,l,0)}(j\omega, \alpha), \quad \alpha \in (a_{kl0}, b_{kl0}), \quad (5.18)$$

kde uspořádaná trojice indexů  $(k, l, 0)$  probíhá  $n$ -člennou posloupnost

$$(1, n-1, 0), (1, n-2, 0), \dots, (1, 1, 0), (n-1, 1, 0), \quad (5.19)$$

$H_{(k,l,0)}(s, \alpha)$  je přípustný přenos daný vztahem

$$H_{(k,l,0)}(s, \alpha) = \frac{K_{kl}(\alpha)}{[\tau_{kl0}(\alpha)s + 1]^k [\vartheta_{kl0}(\alpha)s + 1]^l}, \quad (5.20)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_{kl0}(\alpha) &= \tan \alpha \\ \vartheta_{kl0}(\alpha) &= \tan \frac{\varphi - k\alpha}{l} \\ K_{kl0}(\alpha) &= [\tau_{kl0}^2(\alpha)s + 1]^{\frac{k}{2}} [\vartheta_{kl0}^2(\alpha)s + 1]^{\frac{l}{2}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} a_{kl0} &= 0 \\ b_{kl0} &= \frac{\varphi}{k+l} \end{aligned}$$

- (ii) Je-li  $r > 0$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n+1$  stran (v kompatibilním pořadí s vrcholy (5.16)) určených křivkami

$$H_{(k,l,m)}(j\omega, \alpha), \quad \alpha \in (a_{klm}, b_{klm}), \quad (5.21)$$

kde uspořádaná trojice indexů  $(k, l, m)$  probíhá  $n+1$ -člennou posloupnost

$$\begin{aligned} &(1, n-1, 0), (1, n-2, 0), \dots, (1, r, 0), \\ &(m-r-1, 1, r), (n-r, 1, r-1), \dots, (n-1, 1, 0) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$H_{(k,l,m)}(s, \alpha)$  je přípustný přenos daný vztahem

$$H_{(k,l,m)}(s, \alpha) = \frac{K_{klm}(\alpha)}{[\tau_{klm}(\alpha)s + 1]^k [\vartheta_{klm}(\alpha)s + 1]^l s^m}, \quad (5.23)$$

kde

$$\begin{aligned}\tau_{klm}(\alpha) &= \tan \alpha \\ \vartheta_{klm}(\alpha) &= \tan \frac{\varphi - k\alpha - m\frac{\pi}{2}}{l} \\ K_{klm}(\alpha) &= [\tau_{klm}^2(\alpha)s + 1]^{\frac{k}{2}} [\vartheta_{klm}^2(\alpha)s + 1]^{\frac{l}{2}}\end{aligned}$$

a

$$a_{klm} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \varphi - (m+l)\frac{\pi}{2} < 0 \\ \frac{\varphi - (m+l)\frac{\pi}{2}}{k} & \text{pro } \varphi - (m+l)\frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$b_{klm} = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{k+l} \quad (5.25)$$

**Důkaz:** Tvrzení věty plynou přímo z věty 6.4.1 a lemmatu 6.4.1. ■

Všimněme si, že přípustné polynomy (5.15), (5.17), (5.20) a (5.23) nezávisí na volbě frekvence  $\omega$  a tedy, že krajním bodům množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  odpovídají stále tytéž přípustné přenosy. Jinými slovy: extrémální systémy množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$  nezávisí na konkrétní volbě frekvence  $\omega$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ . Z tohoto důvodu můžeme tedy přímo hovořit o extrémálních přenosech modelu či množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ .

Označíme-li nyní symbolem  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$  množinu, do které patří všechny polynomy (5.15), (5.17), (5.20) a (5.23) z věty 5.3.1. (odpovídající hranici  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ), potom platí pro naše účely důležitá věta:

**Věta 5.3.2 (reprezentativní podmnožina).** *Množina  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$  je reprezentativní podmnožina množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ .*

## 5.4 Dvoubodový model: případ $\omega_1 = 0$

V tomto oddíle budeme vyšetřovat model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2)$  pro  $F_1 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\omega_1 = 0, F_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$  a  $\omega_2 > 0$ . Naším cílem bude, podobně jako v předchozím oddíle, nalézt konstruktivní popis hranice množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  pro  $\omega > 0, \omega \neq 1$  a na jeho základě určit reprezentativní podmnožinu množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2)$ . Bez ztráty obecnosti se můžeme omezit na normalizovaný případ  $F_1 = 1, F_2 = re^{-j\varphi}, \omega_2 = 1$ , neboť podle lemmatu 6.2.2 platí

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega) &= |F_1| \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n\left(\frac{F_1}{|F_1|}, 0; \frac{F_2}{|F_2|}, 1; \frac{\omega}{\omega_2}\right) = \\ &= |F_1| \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n\left(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \frac{\omega}{\omega_2}\right)\end{aligned} \quad (5.26)$$

Dále tedy budeme zkoumat množinu přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$ , kde  $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$ .

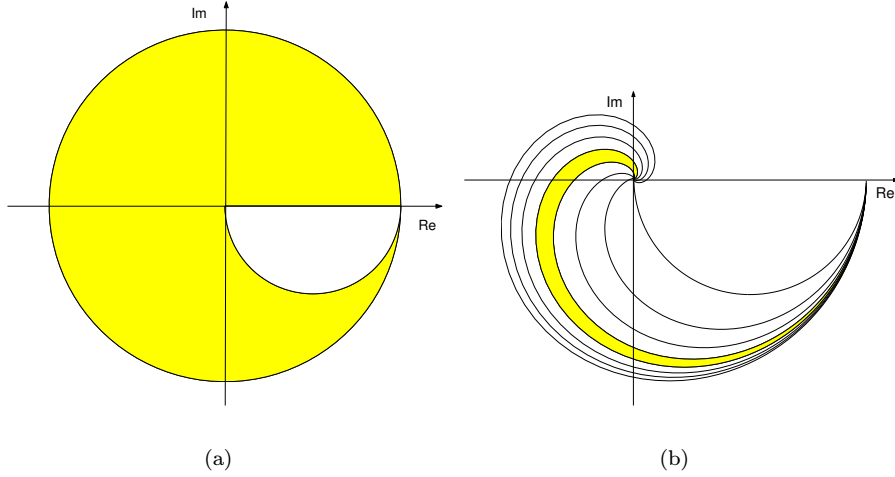
Pro účely zavedení některých pomocných pojmů uvažujme nejprve množinu přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(1, 0)$ . Připomeňme, že  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(1, 0)$  právě tehdy, jestliže

$$F(s) = \frac{1}{p(s)},$$

kde  $p(s)$  je libovolný polynom mající pouze reálné záporné kořeny a platí  $p(j0) = 1$ . Je-li

$$\mathbb{Z} \triangleq \{z : z \in \mathbb{C} - \{0\}, \arg z \in (-2\pi, 0)\}$$

otevřený sektor komplexní roviny, potom body  $F(j) \in \mathbb{Z}$  frekvenčních charakteristik přípustných systémů  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(1, 0)$  vyplní zřejmě útvar  $\mathcal{F}_2$  zobrazený na obr. 5.4a.



Obrázek 5.4: a) Množina  $\mathcal{F}_2$ , b) buňka  $\mathcal{B}_4$

Jinými slovy

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}(1, 0; 1) \cap \mathbb{Z}$$

Odtud zřejmě plyne, že  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$  je neprázdná množina právě tehdy, jestliže  $re^{-j\varphi} \in \mathcal{F}_2$ .

Nyní uvažujme přenosy  $R_k(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(1, 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ve tvaru

$$R_k(s) = \frac{1}{(s+1)^k} \quad (5.27)$$

Frekvenční charakteristiky  $R_k(j\omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  se v sektoru  $\mathbb{Z}$  s výjimkou bodu 1 neprotínají (viz lemma 6.5.1) a tedy rozdělují  $\mathbb{Z}$  (a též  $\mathcal{F}_2$ ) na disjunktní souvislé komponenty (viz obr.5.4b). Otevřenou oblast  $\mathcal{B}_k \subset \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  komplexní roviny ohraničenou křivkami  $R_k(j\omega), R_{k+1}(j\omega)$ ,  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$ , a pro  $k > 3$  též reálnou osou  $\mathbb{R}^+$  tak, že  $\mathcal{B}_k$  leží nalevo od orientované křivky  $R_k(j\omega)$ ,  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$  a napravo do orientované křivky  $R_{k+1}(j\omega)$ ,  $\omega \in \langle 0, +\infty \rangle$  budeme nazývat  $k$ -buňkou nebo buňkou  $\mathcal{B}_k$  množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}(1, 0; 1)$ . Na obr. 5.4b, je vyznačena buňka 4.

Pojem buňky jsme zavedli proto, že vlastnosti množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  závisí na tom, v které  $k$ -buňce se nachází bod  $re^{-j\varphi}$ . V této souvislosti poznamenejme, že jestliže bod  $re^{-j\varphi}$  nepatří do žádné buňky  $\mathcal{B}_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , potom je množina přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$  prázdná. Předtím, než uvedeme obecnou větu charakterizující hranici množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,

$\omega > 0, \omega \neq 1$ , ilustrujme si vlastnosti této množiny na několika příkladech.

**Příklad 1** ( $re^{-j\varphi} \in \mathcal{B}_1$ )

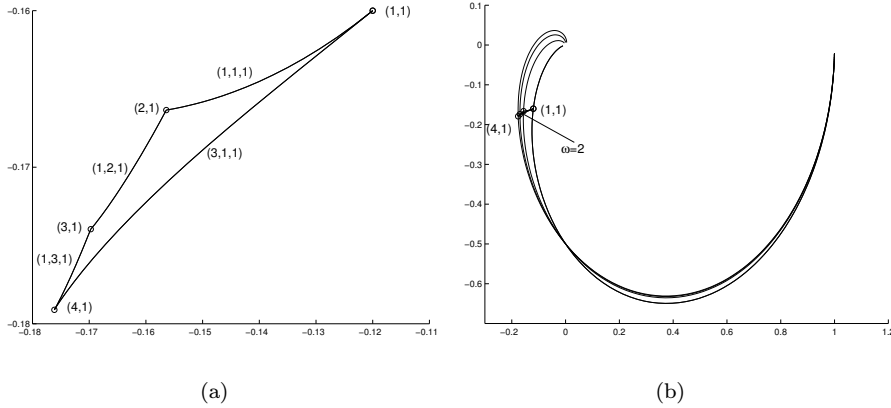
Nechť  $n = 5$ ,  $r = 0,5$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = 2$ . Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je zobrazena na obr. 5.5a. Je to křivoúhelník se čtyřmi vrcholy. Překvapivé je, že hranici tohoto křivoúhelníka odpovídají pouze přenosy ve tvaru

$$H_{(n_1, n_2, m)}(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3}},$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3, n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$  a  $\sum_{i=1}^3 n_i \leq n$ . Prozradíme dopředu, že toto tvrzení platí obecně. Každé straně křivoúhelníku  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je na obr. 5.5a přiřazena uspořádaná trojice  $(i_1, i_2, i_3)$ , která nám říká, že všechny body této strany odpovídají přípustným přenosům ve tvaru  $H_{(i_1, i_2, i_3)}(s)$ . Vrcholy křivoúhelníka odpovídají přenosům ve tvaru

$$V_{(n_1, n_2)}(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}},$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2, n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$  a  $n_1 + n_2 \leq n$ . Této skutečnosti odpovídá i příslušný popis vrcholů pomocí uspořádaných dvojic  $(n_1, m)$ . Na obr. 5.5b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky přípustných přenosů odpovídající všem vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ .



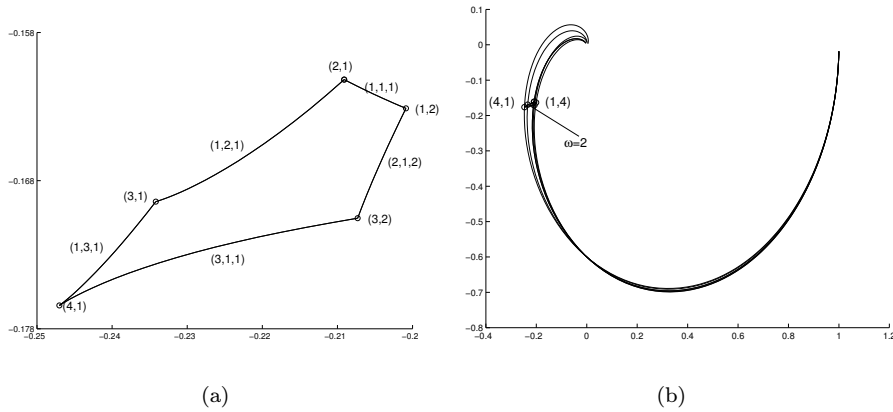
Obrázek 5.5: a) Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^5(1, 0; 0,5e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$ ; b) Frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^5(1, 0; 0,5e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$

**Příklad 2** ( $re^{-j\varphi} \in \mathcal{B}_2$ )

Nechť  $n = 5$ ,  $r = 0,6$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = 2$ . Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je zobrazena na obr. 5.6a. Je to opět křivoúhelník, tentokrát však s pěti vrcholy. Značení stran a vrcholů má stejný význam jako v příkladu 1. Na obr. 5.6b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky přípustných přenosů odpovídající všem vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ .

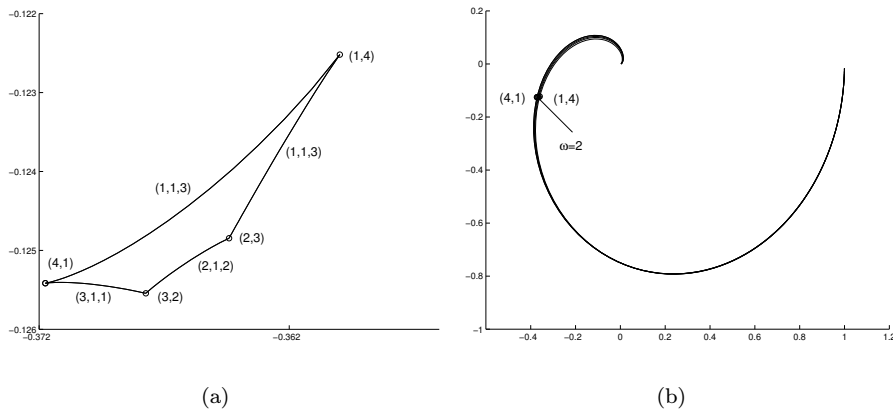
**Příklad 3** ( $re^{-j\varphi} \in \mathcal{B}_4$ )

Nechť  $n = 5$ ,  $r = 0,75$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = 2$ . Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  je zobrazena na obr. 5.7a. V tomto případě jde o křivoúhelník se čtyřmi vrcholy. Na obr.



Obrázek 5.6: a) Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(1, 0; 0.6e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$ ; b) Frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(1, 0; 0.6e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$

5.7b jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky přípustných přenosů odpovídající všem vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ .



Obrázek 5.7: a) Množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(1, 0; \frac{3}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$ ; b) Frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^5(1, 0; \frac{3}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}, 1; 2)$

Poznamenejme, že i v obecném případě lze dokázat (viz věta 6.3.3), že všechny přípustné přenosy, které mají více než tři vesměs různé nenulové póly, odpovídají vnitřním bodům množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ . Nyní naznačíme způsob, jak určit přípustné přenosy právě se dvěma a třemi vesměs různými póly. Začneme s přenosem ve tvaru

$$V_{(n_1, n_2)}(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}}, \quad (5.28)$$



kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2, n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_1 + n_2 \leq n$ . Přenos (5.28) při pevných  $n_1, n_2$  obsahuje pouze dva neznámé parametry  $\tau_1, \tau_2$ . Lze dokázat (lemma 6.5.4), že jestliže existuje přípustný přenos ve tvaru (5.28) splňující podmínku  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ , potom existuje právě jeden takovýto přenos a příslušné parametry  $\tau_1, \tau_2$  mohou být vypočteny následovně:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tan \alpha_0 \\ \tau_2 &= \tan \frac{\varphi - n_1 \alpha_0}{n_2},\end{aligned}\tag{5.29}$$

kde  $\alpha_0$  je jediné řešení rovnice

$$\left(\tan^2 \alpha + 1\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\tan^2 \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2} + 1\right)^{\frac{n_2}{2}} = \frac{1}{r}$$

pro neznámou  $\alpha$  v intervalu

$$I_{n_1 n_2} \triangleq \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi}{n_1 + n_2} \right\rangle$$

Všimněme si, že při daném  $\varphi$  jsou  $\tau_1, \tau_2$  určeny jednoznačně uspořádanou dvojicí  $(n_1, n_2)$ .

Nyní hledíme přípustné přenosy ve tvaru

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3}},\tag{5.30}$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3, n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1$  a  $\sum_{i=1}^3 n_i \leq n$ . Poněvadž tvar (5.30) obsahuje o jeden parametr více než tvar (5.28), lze očekávat, že bude existovat jednoparametrické množství přípustných přenosů ve tvaru (5.30). Skutečně, jestliže je množina přípustných systémů ve tvaru (5.30) neprázdná, potom lze tuto množinu parametrizovat pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}\tau_1(\beta) &= \tan \alpha_\beta \\ \tau_2(\beta) &= \tan \frac{\varphi - n_3 \beta - n_1 \alpha_\beta}{n_2}, \\ \tau_3(\beta) &= \tan \beta\end{aligned}\tag{5.31}$$

kde  $\alpha_\beta$  je jediné řešení rovnice

$$\left(\tan^2 \alpha + 1\right)^{\frac{n_1}{2}} \left(\tan^2 \frac{\varphi - n_3 \beta - n_1 \alpha}{n_2} + 1\right)^{\frac{n_2}{2}} = \frac{1}{r} \left(\tan^2 \beta + 1\right)^{\frac{n_3}{2}}$$

pro neznámou  $\alpha$  v intervalu

$$I_\alpha \triangleq \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - n_3 \beta - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi - n_3 \beta}{n_1 + n_2} \right\rangle$$

a parametr  $\beta$  probíhá interval

$$I_\beta \triangleq \left\langle a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3} \right\rangle \subset \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

který je definován implicitně relací

$$\beta \in I_\beta \iff \beta \in \left\langle \frac{\varphi - n_1 \alpha_\beta}{n_2 + n_3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - (n_1 + n_2) \frac{\pi}{2}}{n_3}, \frac{\varphi}{n_3} \right\rangle\tag{5.32}$$

Zřejmě, při daných  $r$  a  $\varphi$ , závisí meze  $a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}$  intervalu  $I_\beta$  pouze na uspořádané trojici  $(n_1, n_2, n_3)$ . Více přímý způsob jak tyto meze určit vyplývá z lemmatu 6.5.8. Poznamenejme, že parametrizaci (5.31) lze snadno získat užitím (5.29) pro případ, kdy v (5.30) zafixujeme  $\tau_3$  na hodnotě  $\tan \beta$ , kde  $\beta \in I_\beta$  je parametr. Relaci (5.32) potom obdržíme z podmínky  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ .

Pro naše účely je důležité, že zobrazení

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(j\omega, \beta), \quad \beta \in I_\beta$$

pro dané  $\omega$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , kde

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(s, \beta) \triangleq \frac{1}{[\tau_1(\beta)s + 1]^{n_1} [\tau_2(\beta)s + 1]^{n_2} [\tau_3(\beta)s + 1]^{n_3}} \quad (5.33)$$

je hladká křivka v komplexní rovině jejíž počáteční i koncový bod odpovídá přípustným přenosům ve tvaru (5.28). (Detaily viz definice 6.5.5 a lemma 6.5.8). Nyní jsme již připraveni formulovat větu charakterizující hranici množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  v obecném případě:

**Věta 5.4.1 (hranice  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ).** *Nechť  $re^{-j\varphi}$ , kde  $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$ , je bod buňky  $\mathcal{B}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$  množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}(1, 0; 1)$ , potom množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , je křivouhelník v komplexní rovině s  $n-1$  nebo  $n$  vrcholy a stranami, které jsou blíže určeny následovně:*

*Vrcholy:*

(i) *Je-li  $m = 1$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n-1$  vrcholů:*

$$V_{(1,1)}(j\omega), V_{(2,1)}(j\omega), \dots, V_{(n-1,1)}(j\omega),$$

*kde  $V_{(n_1, n_2)}(s)$  je přípustný přenos ve tvaru (5.28) daný vztahem (5.29).*

(ii) *Je-li  $m \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n$  vrcholů:*

$$V_{(m,1)}(j\omega), V_{(m+1,1)}(j\omega), \dots, V_{(n-1,1)}(j\omega), \\ V_{(n-2,2)}(j\omega), V_{(n-3,3)}(j\omega), \dots, V_{(n-m,m)}(j\omega), V_{(1,m)}(j\omega),$$

*kde  $V_{(n_1, n_2)}(s)$  je přípustný přenos ve tvaru (5.28) daný vztahem (5.29).*

(iii) *Je-li  $m = n-1$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n-1$  vrcholů:*

$$V_{(n-1,1)}(j\omega), V_{(n-2,1)}(j\omega), \dots, V_{(1,n-1)}(j\omega),$$

*kde  $V_{(n_1, n_2)}(s)$  je přípustný přenos ve tvaru (5.28) daný vztahem (5.29).*

*Strany:*

(i) *Je-li  $m = 1$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n-1$  stran určených křivkami*

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(j\omega, \beta), \quad \beta \in (a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}),$$

*kde uspořádaná trojice  $(n_1, n_2, n_3)$  probíhá  $(n-1)$ -člennou posloupnost*

$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, n-2, 1), (n-2, 1, 1),$$

*$H_{(n_1, n_2, n_3)}(s, \beta)$  je přípustný přenos daný vztahy (5.33), (5.31) a  $a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}$  jsou určena relací (5.32).*

(ii) Je-li  $m \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n$  stran určených křivkami

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(j\omega, \beta), \quad \beta \in (a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}),$$

kde uspořádaná trojice  $(n_1, n_2, n_3)$  probíhá  $n$ -člennou posloupnost

$$(1, m, 1), (1, m+1, 1), \dots, (1, n-2, 1), \\ (n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (n-m-1, 1, m), (1, m-1, 1)$$

$H_{(n_1, n_2, n_3)}(s, \beta)$  je přípustný přenos daný vztahy (5.33), (5.31) a  $a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}$  jsou určena relací (5.32).

(iii) Je-li  $m = n-1$ , potom  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$  má  $n-1$  stran určených křivkami

$$H_{(n_1, n_2, n_3)}(j\omega, \beta), \quad \beta \in (a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}),$$

kde uspořádaná trojice  $(n_1, n_2, n_3)$  probíhá  $(n-1)$ -člennou posloupnost

$$(n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (1, 1, n-2), (1, n-2, 1),$$

$H_{(n_1, n_2, n_3)}(s, \beta)$  je přípustný přenos daný vztahy (5.33), (5.31) a  $a_{n_1 n_2 n_3}, b_{n_1 n_2 n_3}$  jsou určena relací (5.32).

**Důkaz:** Tvrzení věty plynou přímo z věty 6.5.1 a lemmat 6.4.1, 6.5.4, 6.5.7, 6.5.8. ■

Všimněme si, že z věty 5.4.1 vyplývá, že přípustné polynomy odpovídající krajním bodům množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$  nezávisí na konkrétní volbě frekvence  $\omega$ . Z tohoto důvodu můžeme tedy přímo hovořit o extrémálních přenosech modelu či množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$ . Označíme-li tedy symbolem  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$  množinu všech extrémálních přenosů množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$ , potom zřejmě platí následující věta:

**Věta 5.4.2 (reprezentativní podmnožina).** Množina  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$  je reprezentativní podmnožina množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{-j\varphi}, 1)$ .

## 5.5 Dvoubodový model: případ $\omega_1 > 0$

V tomto oddíle stručně naznačíme ideu konstrukce množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ , kde  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2\}$ , pro případ  $\omega_1 > 0$ . Z důvodu stručnosti nevedeme obecnou charakterizaci hranice této množiny, ale pouze načrtne konstruktivní postup jak ji v konkrétním případě nalézt.

Základní idea konstrukce množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  spočívá v tom, že nejprve nalezneme množinu  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  (viz věta 5.3.1) a jistý systém jejích podmnožin – tzv. buněk (viz lemma 6.6.2) a poté na základě jejich znalosti postupně sestrojíme vrcholy a hrany množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . Celý postup nyní nastíníme pro obecný případ. Ačkoliv zde použijeme intuitivní způsob výkladu, poznamenejme, že správnost celého postupu je plně dokázána v kap. 6. Poznamenejme ještě, že předkládaný postup je též vhodný pro numerický algoritmus určující příslušné extrémální přenosy.

Z věty 5.3.1 plyne, že v popisu množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  hrají významnou roli přípustné přenosy ve tvaru

$$V_{(n_1, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m}, \quad (5.34)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $n_1 + m \leq n$  a přípustné přenosy ve tvaru

$$H_{(n_1, n_2, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m}, \quad (5.35)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ,  $n_1 + n_2 + m \leq n$ . Poznamenejme, že je-li dána uspořádaná dvojice  $(n_1, m)$ , potom podmínka  $V_{(n_1, m)}(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$  jednoznačně určuje parametry  $K_0$  a  $\tau_1$  v (5.34) (v případě, že takové existují). Odtud plyne, že přípustným přenosům ve tvaru (5.34) odpovídá konečný počet bodů množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$ . Tyto body budeme nazývat *uzly* množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$ . Z věty 5.3.1 víme, že mezi uzly patří všechny vrcholy křivoúhelníku  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$ . Podobně, je-li dána uspořádaná trojice  $(n_1, n_2, m)$ , potom podmínka  $H_{(n_1, n_2, m)}(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$  určuje jednoparametrické množství přípustných přenosů ve tvaru (5.35) (v případě, že existuje alespoň jeden takovýto přenos). Tedy přípustným přenosům (5.35) pro danou uspořádanou trojici  $(n_1, n_2, m)$  odpovídá křivka v množině  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$ . Tuto křivku budeme nazývat  $(n_1, n_2, m)$ -*příčkou* množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$ . Podle věty 5.3.1 jsou všechny strany křivoúhelníku  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega)$  příčky. Nyní provedme ještě jeden krok. Uvažujme přípustné přenosy ve tvaru

$$B_{(n_1, n_2, n_3, m)}(s) = \frac{k_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3} s^m}, \quad (5.36)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $m > 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 n_i + m < n$ . Obor hodnot přípustných polynomů  $B_{(n_1, n_2, n_3, m)}(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$  pro danou uspořádanou čtveřici  $(n_1, n_2, n_3, m)$  v bodě  $s = j\omega_2$  je zřejmě podmnožina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ . Tuto podmnožinu budeme nazývat  $(n_1, n_2, n_3, m)$ -*buňkou* nebo jen *buňkou* množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  a budeme ji též označovat symbolem  $\mathcal{B}(n_1, n_2, n_3, m)$ . Pro zavedené pojmy platí následující tvrzení:

- (i) Krajní body příček množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  jsou uzly množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ .
- (ii) Buňky množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  jsou ohraničené třemi nebo čtyřmi příčkami množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ .
- (iii) Sjednocení všech buněk  $\mathcal{B}(n_1, n_2, n_3, m)$ , kde čtveřice  $(n_1, n_2, n_3, m)$  probíhá přes všechny čtveřice, pro které platí  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $m \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^3 n_i + m \leq n$ , je množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ . (Poznamenejme, že dvě různé buňky se mohou obecně překrývat.)

Nyní se zabýváme na chvíli množinou  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ , kde  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2\}$ . Není těžké uhodnout, že stejnou roli, jako polynomy ve tvaru (5.34), (5.35) a (5.36) hrají pro množinu  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  hrají dále uvedené tvary polynomů pro množinu  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . Konkrétně pro uzly množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  jsou to polynomy ve tvaru

$$V_{(n_1, n_2, n_3, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3} s^m}, \quad (5.37)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $m \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^3 n_i + m \leq n$ . Pro příčky množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  jsou to polynomy ve tvaru

$$H_{(n_1, n_2, n_3, n_4, m)}(s) = \frac{K_0}{\prod_{i=1}^4 (\tau_i s + 1)^{n_i s^m}}, \quad (5.38)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \tau_4$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $m \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^4 n_i + m \leq n$ . A konečně pro buňky množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  jsou to polynomy ve tvaru

$$B_{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, m)}(s) = \frac{K_0}{\prod_{i=1}^5 (\tau_i s + 1)^{n_i s^m}}, \quad (5.39)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1, \tau_i \leq \tau_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $m \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^4 n_i + m \leq n$ .

Nyní jsme připraveni naznačit krok vedoucí k určení uzlů, příček a buněk množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  na základě znalosti uzlů, příček a buněk množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ . Jestliže  $F_2 \notin \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ , potom je zřejmě množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  prázdná. Je-li  $F_2 \in \mathcal{B}(n_1, n_2, n_3, m)$ , kde  $\mathcal{B}(n_1, n_2, n_3, m)$  je některá buňka množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ , potom existuje jediný přípustný přenos  $B_{(n_1, n_2, n_3, m)}(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$  ve tvaru (5.36). Tento přenos je současně ve tvaru (5.37) a odpovídá tedy uzlu množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . Tímto způsobem můžeme zkonstruovat všechny uzly množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . K tomu zřejmě stačí, provedeme-li výše naznačenou konstrukci uzlu pro všechny buňky  $\mathcal{B}(n_1, n_2, n_3, m)$ , do kterých patří  $F_2$ . Celkový počet uzlů množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  je tedy roven počtu buněk obsahujících bod  $F_2$ . Známe-li všechny uzly množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ , můžeme již relativně snadno zkonstruovat všechny její příčky a dokonce i její buňky, neboť hranice buněk jsou tvořeny příčkami. Požadujeme-li nalézt pouze hranici množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ , můžeme postupovat tak, že odstraněním vnitřních příček z množiny všech příček získáme strany křivoúhelníku  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . Poznamenejme, že skutečnost, zda je  $(n_1, n_2, n_3, n_4, m)$ -příčka vnitřní příčka, lze snadno určit pouze na základě čísel  $n_1, n_2, n_3, n_4$  a  $m$ .

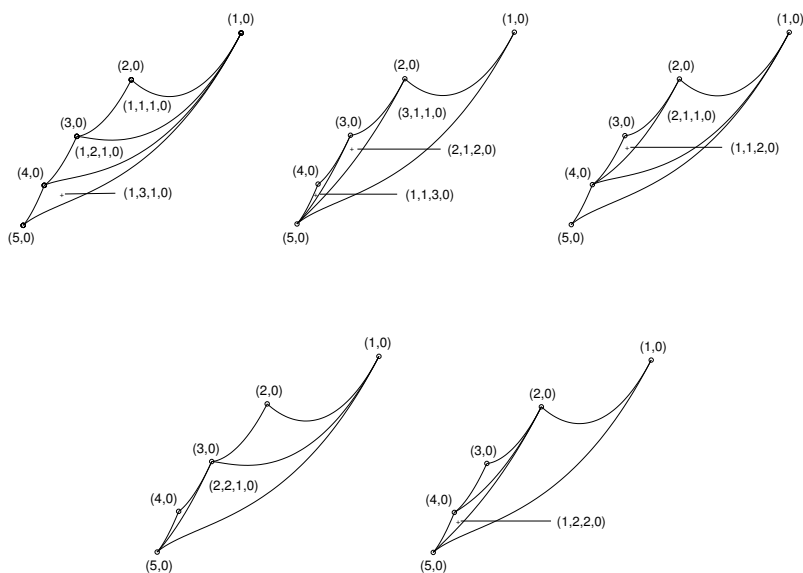
Nyní budeme celý postup ilustrovat na dvou příkladech, které budou samy o sobě užitečné i pro analýzu řešení úloh RNR v následujících kapitolách.

### Příklad 1 ( $\arg F_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ )

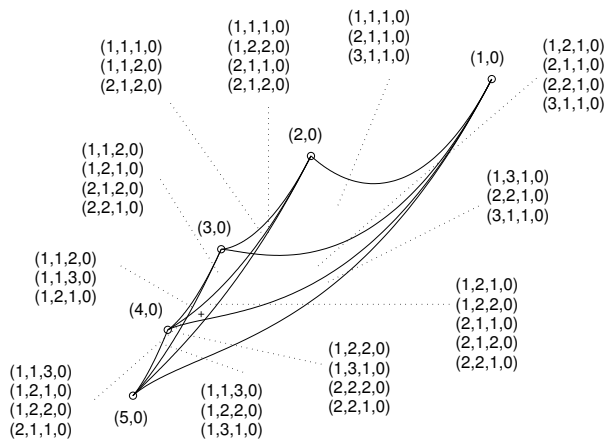
Nechť  $n = 5$ ,  $F_1 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $F_2 = -0,225 - 0,632j$ ,  $\omega_2 = 2$ ,  $\omega = 3$ . Na obr. 5.8 je zobrazeno pět kopií množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ , na kterých je dohromady vyznačeno pomocí uspořádané čtveřice  $(n_1, n_2, n_3, m)$  všech 10 ( $= \binom{n}{3}$ ) neprázdných buněk této množiny. (Na každé kopii je vyznačeno jen několik navzájem nepřekrývajících se buněk.) Všimněme si, že každým třem vrcholům  $(k, 0)$ ,  $(l, 0)$ ,  $(m, 0)$ ,  $k \geq l \geq m$  přísluší buňka  $(k - l, l - m, m, 0)$ .

Na obr. 5.9 je zobrazena množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  se všemi svými příčkami. Ty ji rozdělují na 11 disjunktních komponent. Každá z těchto komponent patří do několika buněk. Pro každou komponentu jsou buňky, které je obsahují, vyznačeny pomocí příslušných uspořádaných čtveřic. Všimněme si, že bod  $F_2$  vyznačený křížkem patří do komponenty, která je obsažena v pěti různých buňkách. Z toho plyne, že existuje právě pět různých přípustných přenosů ve tvaru (5.36) a (5.37), kde čtveřice  $(n_1, n_2, n_3, m)$  probíhá následující posloupnost

$$(1, 2, 1, 0), (1, 2, 2, 0), (2, 1, 1, 0), (2, 1, 2, 0), (2, 2, 1, 0).$$



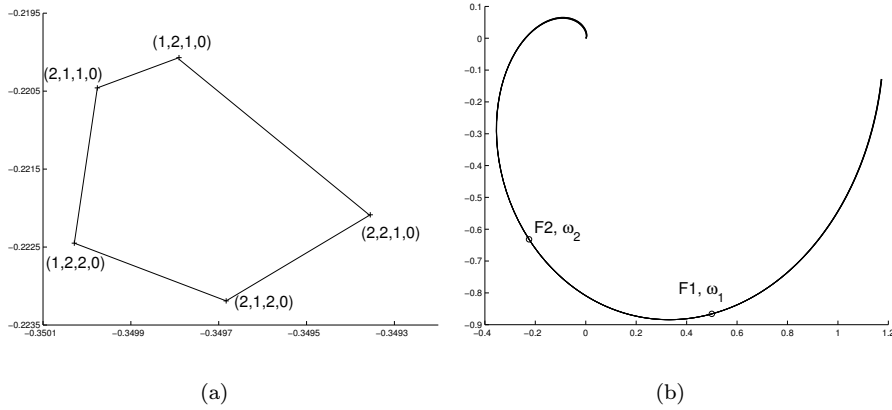
Obrázek 5.8: Buňky množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ .



Obrázek 5.9: Komponenty množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  určené příčkami této množiny

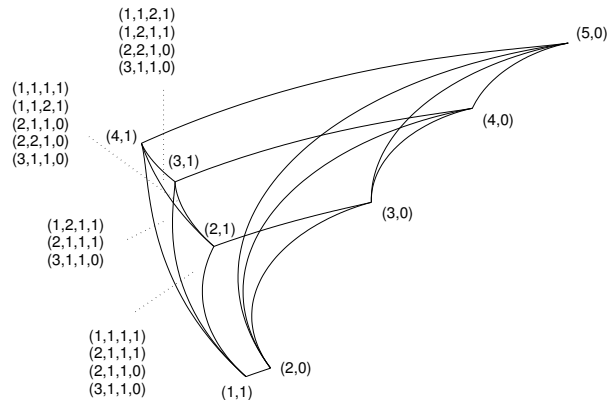
Odtud plyne, že množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$  má pět různých uzlů. Všechny tyto uzly jsou současně vrcholy množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ , jak je patrné z obr. 5.10. Na stejném obrázku jsou zobrazeny též frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ . Pozoruhodné je, že tyto charakteristiky téměř splývají. Poznamenejme, že obdobné splývání všech frekvenčních charakteristik přenosů  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2)$  je typické a téměř nezávisí na volbě  $n$  a konkrétních bodů  $F_1, \omega_1$  a  $F_2, \omega_2$ . Z této skutečnosti lze

usoudit, že přesná znalost dvou bodů frekvenční charakteristiky pro daná fázová zpoždění (tedy čtyř čísel) je více než dostatečná informace (při uvažované apriorní informaci) pro návrh vyhovujícího regulátoru.



Obrázek 5.10: a) Vrcholy křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$ ; b) frekvenční charakteristiky odpovídající vrcholům  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2; \omega)$

**Příklad 2** ( $\arg F_1 \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ ) Necht  $n = 5$ ,  $F_1 = e^{-j\frac{5\pi}{6}}$ ,  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ . Na obr. 5.11 je zobrazena množina  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  se všemi svými příčkami. Ty ji rozdělují tentokrát na 15 disjunktních komponent. Čtyři nové komponenty, které se nevyskytovaly v příkladu 1, jsou opatřeny příslušným seznamem buněk. (Seznam stejně jako v příkladu 1 obsahuje všechny buňky, které danou komponentu obsahují). Všimněme si, že všechny tyto komponenty „obsahují“ jak statické, tak i astatické systémy ve tvaru (5.36) a dohromady tvoří množinu  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-,1}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$ .



Obrázek 5.11: Množiny  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-,1}^n(F_1, \omega_1; \omega_2)$  se všemi svými příčkami.

## Kapitola 6

# Extremální polynomy

Nechť  $p(s)$  je polynom s reálnými nezápornými koeficienty stupně maximálně  $n$ , jehož kořeny leží v dané symetrické podmnožině  $\mathcal{D}$  levé poloroviny  $\mathbb{C}^-$  komplexní roviny. Požadujeme dále, aby tento polynom splňoval interpolační podmínky  $p(j\omega_i) = P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , kde  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  jsou reálná nezáporná a  $P_1, P_2, \dots, P_k$  komplexní čísla. Množinu všech takových polynomů označme  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  a obor hodnot všech polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  pro  $s = j\omega$ , označme  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ . V této kapitole se budeme zabývat následujícím problémem: Nalezněte všechny tzv. extrémální polynomy  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , které odpovídají krajním bodům množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , pro dané  $\omega$ . Pro obecné  $\mathcal{D}$  uvedeme nutnou podmínku, kterou musí splňovat extrémální polynomy. Ve speciálním případě  $\mathcal{D} = (-\infty, 0)$  ukážeme, že extrémální polynomy nezávisí na výběru  $\omega$  a nalezneme jejich explicitní tvar a efektivní algoritmus pro jejich výpočet v případě  $k \leq 2$ .

### 6.1 Formulace problému

V tomto oddílu zavedeme základní pojmy a označení, které budeme dále užívat v celé této kapitole.

Symbolem  $\mathcal{P}$  budeme označovat množinu všech polynomů s reálnými nezápornými koeficienty. Podmnožinu  $\mathcal{P}$  obsahující pouze polynomy maximálně stupně  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  budeme označovat  $\mathcal{P}^n$ . Podmnožinu  $\mathcal{P}$  resp.  $\mathcal{P}^n$  obsahující pouze polynomy, jejichž kořeny leží v symetrické množině  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$ , budeme označovat  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$  resp.  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n$ .

Nechť  $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{C}$  a  $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , potom  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(P_1, \omega_1; P_2, \omega_2; \dots; P_k, \omega_k)$  nebo zkráceně  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  označuje množinu všech polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n$  (tzv. přípustných), které splňují interpolační podmínky

$$p(j\omega_i) = P_i, \quad (6.1)$$

$$0 \leq \arg p(j\omega_i) < 2\pi, \quad (6.2)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\arg p(j\omega_i)$  označuje celkový úhel, o který se otočí průvodič  $p(j\omega_i)$  kolem počátku komplexní roviny, jestliže  $\omega$  proběhne interval  $\langle 0, \omega_i \rangle$  v kladném směru. Podmínka (6.2) vyjadřuje požadavek, aby interpolační podmínky (6.1) přiřazovaly hodnoty křivce  $p(j\omega)$  při prvním „oběhu“  $p(j\omega)$  kolem



počátku a nikoliv při některém dalším. Poznamenejme ještě, že je-li  $\omega_1 = 0$ , potom má smysl uvažovat pouze  $P_1 \in \mathbb{R}$ . Množina všech *přípustných polynomů*  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  je tedy definována vztahem

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \{p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n : p(s) \text{ splňuje (6.1) a (6.2)}\}. \quad (6.3)$$

Dále definujeme

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k). \quad (6.4)$$

Množinu všech hodnot, které nabývají polynomy  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  v bodě  $s = j\omega$ ,  $\omega > 0$ , označme symbolem  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  tj.

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)\} \quad (6.5)$$

a analogicky definujeme

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega). \quad (6.6)$$

Množinu  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  budeme nazývat *oborem hodnot přípustných polynomů* v bodě  $s = j\omega$ .

Pro případ  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^- \triangleq (-\infty, 0)$  zavedme ještě následující označení

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-, m}^n \triangleq \{p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n : p(s) \text{ má } m\text{-násobný kořen } 0\}. \quad (6.7)$$

Podobně

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-, m}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) \triangleq \{p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-, m}^n\} \quad (6.8)$$

a

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-, m}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) \triangleq \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-, m}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)\}. \quad (6.9)$$

**Definice 6.1.1 (extremální polynom).** Je-li  $z \in \partial \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ , potom každý polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , pro který platí  $p(j\omega) = z$ , budeme nazývat *extremálním polynomem množiny*  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ .

V této kapitole se budeme zabývat následujícím problémem: Nalezněte všechny extrémální polynomy  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro dané  $\omega$ . Ve speciálním případě  $\mathcal{D} = (-\infty, 0)$  ukážeme, že extrémální polynomy nezávisí na výběru  $\omega$  a nalezneme jejich explicitní tvar a efektivní algoritmus pro jejich výpočet v případě  $k \leq 2$ . Pro obecné  $\mathcal{D}$  uvedeme nutnou podmínku, kterou musí splňovat extrémální polynomy.

## 6.2 Pomocná tvrzení

Nyní uvedeme některá pomocná tvrzení týkající se množiny přípustných polynomů  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  a jejich oboru hodnot  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ ,  $\omega > 0$ , která budou dále užitečná pro charakterizaci extrémálních polynomů.

**Lemma 6.2.1.** *Je-li  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , potom pro libovolné  $a, b > 0$  platí*

$$ap\left(\frac{s}{b}\right) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k).$$

**Důkaz:** Necht  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , potom podle definice platí

$$p(j\omega_i) = P_i$$

$$\arg p(j\omega_i) \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

pro všechny  $i = 1, 2, \dots, k$ . Odtud

$$ap\left(\frac{bj\omega_i}{b}\right) = ap(j\omega_i) = aP_i$$

a tedy

$$ap\left(\frac{s}{b}\right) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k).$$

■

**Lemma 6.2.2.** *Pro libovolná  $a, b > 0$  platí*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k; b\omega).$$

*Speciálně pro  $k = 1$  a  $\omega_1 > 0$  platí*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(P_1, \omega_1; \omega) = |P_1| \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n\left(\frac{P_1}{|P_1|}, 1; \frac{\omega}{\omega_1}\right) = |P_1| \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(e^{j\varphi_1}, 1; \frac{\omega}{\omega_1}), \quad (6.10)$$

kde  $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ .

**Důkaz:** Necht  $z = p(j\omega) \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ ,  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , potom podle lemmatu 6.2.1 platí

$$ap\left(\frac{s}{b}\right) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k)$$

a tedy

$$ap\left(\frac{j\omega}{b}\right) = ap(j\omega) \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k; b\omega)$$

neboli

$$z = p(j\omega) \in \frac{1}{a} \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle aP_i, b\omega_i \rangle_{i=1}^k; b\omega).$$

Obrácením postupu je důkaz dokončen.

■

Poznamenejme, že lemmata 6.2.1 a 6.2.2 umožňují provádět měřítkování interpolačních dat  $P_1, P_2, \dots, P_k$  a  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ , a tím snížit počet nezávisle proměnných. Viz např. (6.10).

**Lemma 6.2.3.** *Nechť  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ ,  $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ ,  $2k \leq n$ , potom polynom*

$$p(s) = q(s) + \delta(s) \quad (6.11)$$

*je prvkem  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  právě tehdy, jestliže*

$$\delta(s) = s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_3^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \omega_k^2)(d_{n-2k+1}s^{n-2k+1} + \dots + d_1s + d_0),$$

*pro  $\omega_1 = 0$ , nebo*

$$\delta(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \omega_k^2)(d_{n-2k}s^{n-2k} + \dots + d_1s + d_0),$$

*pro  $\omega_1 > 0$ ,*

*kde  $d_0, d_1, \dots$  jsou taková reálná čísla, že  $p(s)$  má všechny své kořeny v množině  $\mathcal{D}$  a platí podmínka (6.2).*

**Důkaz:** 1. Nechť  $p(s)$  ve tvaru (6.11) je prvkem  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , potom podle předpokladu platí

$$p(j\omega_i) = q(j\omega_i) + \delta(j\omega_i) = P_i + \delta(j\omega_i) = P_i$$

pro  $i = 1, 2, \dots, k$ . Odtud plyne

$$\delta(j\omega_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (6.13)$$

Poněvadž  $\delta(s)$  je polynom s reálnými koeficienty stupně maximálně  $n$  z (6.13) plyne, že  $\delta(s)$  je ve tvaru (6.12), kde  $d_0, d_1, \dots$  jsou libovolná reálná čísla taková, že  $p(s)$  má všechny své kořeny v množině  $\mathcal{D}$  a platí (6.2).

2. Obráceně, je-li  $\delta(s)$  ve tvaru (6.12), kde  $d_0, d_1, \dots$  jsou libovolná reálná čísla taková, že  $p(s)$  ve tvaru (6.11) má všechny své kořeny v  $\mathcal{D}$  a platí (6.2), potom je zřejmé  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ . ■

Poznamenejme, že podmínka (6.2) pro polynom (6.11), bude zřejmě splněna vždy, jestliže  $d_0, d_1, \dots$  jsou v absolutní hodnotě dostatečně malá reálná čísla. Z tohoto důvodu je možné tuto podmínku vypustit budeme-li zkoumat pouze polynomy v dostatečně malém okolí polynomu  $q(s)$ .

Pro případ  $\omega_1 > 0$  a  $n = 2k$  z lemmatu 6.2.3 plyne, že všechny polynomy  $p(s)$  množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  ležící v dostatečně malém okolí polynomu  $q(s)$  lze vyjádřit ve tvaru

$$p(s) = q(s) + (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \omega_k^2)d_0,$$

kde  $d_0$  je takové reálné číslo, že  $p(s)$  má všechny své kořeny v množině  $\mathcal{D}$ . Všimněme si, že přípustnou množinu hodnot  $d_0$  lze jednoduše určit Evansonou metodou geometrického místa kořenů [31]. V tomto případě dále platí

$$p(j\omega) = q(j\omega) + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \cdot \dots \cdot (\omega_k^2 - \omega^2)d_0,$$

a tedy pro libovolné  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  je  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  podmnožinou přímky rovnoběžné s reálnou osou komplexní roviny. Naznačenou techniku určování vlastností  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  budeme dále často užívat pro speciálně volené polynomy  $q(s)$ .

K důkazu, že některý bod  $z \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  bude užitečné následující lemma.

**Lemma 6.2.4.** Předpokládejme, že  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ ,  $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$  a  $r(s)$  je libovolný daný polynom s reálnými koeficienty stupně nejvýše  $n - 2$ , který splňuje podmínku  $r(j\omega) \neq 0$  pro všechna  $\omega \geq 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ . Dále necht' existuje spojitá funkce  $\lambda_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná na

$$Q \triangleq \{[a, b] : b > 0, a^2 - 4b < 0\},$$

která splňuje následující dvě podmínky:

- (i) Pro všechny  $[a, b] \in Q$  je  $\lambda_0(a, b) > 0$  (resp.  $\lambda_0(a, b) < 0$ ),
- (ii) Pro všechny  $[a, b] \in Q$  a pro všechny  $\lambda \in \langle 0, \lambda_0(a, b) \rangle$  (resp.  $\lambda \in \langle \lambda_0(a, b), 0 \rangle$ ) je polynom

$$p_\lambda(s, a, b) \triangleq q(s) + \lambda(s^2 + as + b)r(s)$$

prvkem množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ ,

potom je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

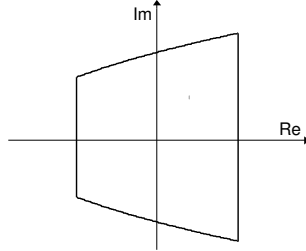
**Důkaz:** Necht'  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ . Definujeme

$$Q_c \triangleq \{[a, b] : b \in \left\langle \frac{1}{2}\omega^2, \frac{3}{2}\omega^2 \right\rangle, |a| \leq \sqrt{b}\}$$

Zřejmě  $Q_c \subset Q$  a množina

$$U_\omega \triangleq \{s^2 + as + b|_{s=j\omega} = b - \omega^2 - j\omega a : [a, b] \in Q_c\}$$

obsahuje 0 jako svůj vnitřní bod, jak je patrné z obr.6.1.



Obrázek 6.1: Množina  $U_\omega$

Dále podle předpokladu je na  $Q_c$  definována spojitá funkce  $\lambda_0(a, b)$  a pro libovolné  $[a, b] \in Q_c$  je  $\lambda_0(a, b) > 0$ . Poněvadž  $Q_c$  je kompaktní množina, podle podmínky (i) existuje  $\lambda^* > 0$  takové, že pro všechny  $[a, b] \in Q_c$  je  $\lambda_0(a, b) \geq \lambda^*$ . Podle podmínky (ii) je polynom

$$p_\lambda(s, a, b) = q(s) + \lambda(s^2 + as + b)r(s)$$

prvkem  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  pro všechny  $[a, b] \in Q_c$  a  $\lambda \in \langle 0, \lambda^* \rangle$ . Tedy množina

$$V_\omega \triangleq \{p_\lambda(j\omega, a, b) : [a, b] \in Q_c, \lambda \in \langle 0, \lambda^* \rangle\}$$

je podmnožinou  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  a zřejmě platí

$$V_\omega = q(j\omega) + \{\lambda r(j\omega) \cdot U_\omega : \lambda \in \langle 0, \lambda^* \rangle\}.$$

Odtud plyne, že  $q(j\omega)$  je vnitřní bod  $V_\omega$  a tedy též množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ .

■

**Lemma 6.2.5.** *Nechť polynom  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , má všechny své kořeny uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , potom je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .*

**Důkaz:** Podle lemmatu 6.2.3 je libovolný polynom  $p(s)$  ve tvaru

$$p(s) = q(s) + \delta(s) \quad (6.14)$$

prvkem množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$  za předpokladu, že

$$\delta(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \omega_k^2)(d_1 s + d_0),$$

kde  $d_0, d_1$  jsou libovolná v absolutní hodnotě dostatečně malá reálná čísla taková, že  $p(s)$  má všechny své kořeny v  $\mathcal{D}$ . Poněvadž podle předpokladu má polynom  $q(s)$  všechny své kořeny uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , ze spojitě závislosti mezi kořeny a koeficienty polynomu plyne, že pro v absolutní hodnotě dostatečně malá čísla  $d_0$  a  $d_1$  má i polynom  $p(s)$  ve tvaru (6.14) všechny své kořeny uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , a je tedy prvkem  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ . Odtud plyne, že pro  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  je bod

$$p(j\omega) = q(j\omega) + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \cdot \dots \cdot (\omega_k^2 - \omega^2)(d_1 j\omega + d_0)$$

pro v absolutní hodnotě dostatečně malá  $d_0$  a  $d_1$  prvkem množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , a v důsledku toho je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ .

■

Stejným způsobem lze dokázat i následující lemma.

**Lemma 6.2.6.** *Nechť polynom  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , má všechny své kořeny uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , potom je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ .*

Nyní uvedeme analogické tvrzení k lemmatům 6.2.5 a 6.2.6 pro případ  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^- \triangleq (-\infty, 0)$ . Lemmata 6.2.5 a 6.2.6 pro tento případ nelze použít, poněvadž množina  $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{C}^-$  nemá v  $\mathbb{C}$  žádné vnitřní body.

**Lemma 6.2.7.** *Nechť polynom  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , je ve tvaru*

$$q(s) = k_0(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdot \dots \cdot (\tau_{2k+1} s + 1), \quad (6.15)$$

kde  $k_0 > 0$  a  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2k+1}$  jsou vesměs různá kladná čísla, potom je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , pro libovolná  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

**Důkaz:** Podle lemmatu 6.2.3 je libovolný polynom  $p(s)$  ve tvaru

$$p(s) = q(s) + \delta(s), \quad (6.16)$$

kde

$$\delta(s) = (s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \cdot \dots \cdot (s^2 + \omega_k^2)(d_1 s + d_0)$$

a  $d_0, d_1$  jsou libovolná v absolutní hodnotě dostatečně malá reálná čísla taková, že  $p(s)$  má všechny své kořeny v intervalu  $(-\infty, 0)$ , prvkem množiny polynomů  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ . Poněvadž podle předpokladu má polynom  $q(s)$  vesměs různé záporné kořeny, ze spojitě závislosti mezi kořeny a koeficienty polynomu plyne, že pro v absolutní hodnotě dostatečně malá čísla  $d_0$  a  $d_1$  má i polynom  $p(s)$  ve tvaru (6.16) všechny své kořeny uvnitř intervalu  $(-\infty, 0)$ , a je tedy prvkem  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ . Odtud plyne, že pro  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  je bod

$$p(j\omega) = q(j\omega) + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) \cdot \dots \cdot (\omega_k^2 - \omega^2)(d_1 j\omega + d_0)$$

pro v absolutní hodnotě dostatečně malá  $d_0$  a  $d_1$ , prvkem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  a v důsledku toho je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{2k+1}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ . ■

Stejným způsobem lze dokázat i následující lemma.

**Lemma 6.2.8.** *Nechť polynom  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ ,  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , je ve tvaru*

$$q(s) = P_1(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdot \dots \cdot (\tau_{2k} s + 1),$$

kde  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  jsou vesměs různá kladná čísla, potom je  $q(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{2k}(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ .

Pro získání jednoduché představy o významu právě uvedených lemmat 6.2.5 až 6.2.8 objasníme například tvrzení lemmatu 6.2.7. Polynom  $q(s)$  ve tvaru (6.15) má  $2k + 2$  volných parametrů:  $k_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2k+1}$ . K tomu, abychom splnili interpolační podmínky

$$q(j\omega_i) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

kteřé představují  $2k$  rovnic pro každé  $i$  dvě rovnice—jedna pro reálnou a druhá pro imaginární část, potřebujeme  $2k$  parametrů, řekneme  $k_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2k-1}$ . Tvrzení lemmatu 6.2.7 říká, že zbylé dva volné parametry  $\tau_{2k}$  a  $\tau_{2k+1}$  za uvedených předpokladů zajistí, že bod  $q(j\omega)$  pro  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  může probíhat dvojdimenzionální oblast v komplexní rovině. Konkrétně např. pro  $k = 1$  jsou body

$$q(j\omega) = k_0(\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1)(\tau_3 j\omega + 1),$$

kde  $q(s)$  jsou přípustné polynomy a  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  jsou vesměs různá kladná čísla, vnitřní body množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^3(P_1, \omega_1, \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq \omega_1$ .

### 6.3 Nutná podmínka pro extrémální polynomy

Nejprve budeme charakterizovat polynomy  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , které nemohou být extrémálními polynomy. V případě  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^-$  takto obdržíme dostatečně silnou nutnou podmínku extrémálnosti polynomu, kterou užijeme v následující části k úplnému řešení problému extrémálních polynomů pro případ  $k \leq 2$ .

**Věta 6.3.1** ( $\omega_1 > 0$ ). *Nechť polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $n \geq 2k + 1$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , má alespoň  $2k + 1$  svých kořenů uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , potom je  $p(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .*

*Jinými slovy, za uvedených předpokladů  $p(s)$  není extrémální polynom pro žádné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .*

**Důkaz:** Z předpokladu plyne, že polynom  $p(s)$  lze vyjádřit ve tvaru

$$p(s) = q(s)r(s), \quad (6.17)$$

kde  $q(s)$  je polynom stupně  $2k + 1$ , jehož všechny kořeny leží uvnitř množiny  $\mathcal{D}$  a  $r(s)$  je vhodný polynom. Podle předpokladu dále platí

$$p(j\omega_i) = q(j\omega_i)r(j\omega_i) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

neboli

$$q(j\omega_i) = \frac{P_i}{r(j\omega_i)} \triangleq P'_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Tedy  $q(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P'_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , a podle lemmatu 6.2.5 je  $q(j\omega)$  vnitřním bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{2k+1}(\langle P'_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ . Odtud ovšem vzhledem k (6.17) plyne, že i bod  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ . ■

Téměř stejným způsobem lze dokázat pomocí lemmat 6.2.6 až 6.2.8 následující věty:

**Věta 6.3.2** ( $\omega_1 = 0$ ). *Nechť polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $n \geq 2k$ ,  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , má alespoň  $2k$  svých kořenů uvnitř množiny  $\mathcal{D}$ , potom je  $p(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .*

*Jinými slovy, za uvedených předpokladů  $p(s)$  není extrémální polynom pro žádné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ .*

**Věta 6.3.3** ( $\mathcal{D} = \mathbb{R}^-$ ,  $\omega_1 > 0$ ). *Nechť polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $n \geq 2k + 1$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , je ve tvaru*

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_{n-m} s + 1)s^m,$$

kde  $0 \leq m < n$  a  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-m}$  jsou nezáporná reálná čísla, mezi kterými existuje alespoň  $2k + 1$  vesměs různých kladných čísel, potom  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

*Jinými slovy, za uvedených předpokladů  $p(s)$  není extrémální polynom pro žádné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .*

**Věta 6.3.4** ( $\mathcal{D} = \mathbb{R}^-$ ,  $\omega_1 = 0$ ). *Nechť polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ , kde  $n \geq 2k$ ,  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ , je ve tvaru*

$$p(s) = P_1(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_n s + 1),$$

kde  $P_1 > 0$  a  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  jsou nezáporná reálná čísla, mezi kterými existuje alespoň  $2k$  vesměs různých kladných čísel, potom  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$ ,  $\omega \in \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ .

*Jinými slovy, za uvedených předpokladů  $p(s)$  není extrémální polynom pro žádné  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ .*

Pro naše další účely budou velmi důležité následující nutné podmínky pro extrémální polynomy.

**Věta 6.3.5** ( $\mathcal{D} = \mathbb{R}^-$ ,  $\omega_1 > 0$ ). *Nechť  $p(s)$  je extrémální polynom množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , kde  $n \geq 2k + 1$ ,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ , potom je  $p(s)$  ve tvaru*

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\tau_{2k} s + 1)^{n_{2k}} s^m, \quad (6.18)$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{2k}$ ,  $m \geq 0$  a  $\sum_{i=1}^{2k} n_i + m \leq n$ .

**Důkaz:** Z předpokladů dokazované věty plyne, že existuje  $z = p(j\omega) \in \partial \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , kde  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k)$ . Bez ztráty obecnosti předpokládejme, že  $p(s)$  je ve tvaru

$$p(s) = k_0(\vartheta_1 s + 1)(\vartheta_2 s + 1) \cdot \dots \cdot (\vartheta_n s + 1) s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $m \geq 0$ . Předpokládejme, že mezi  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  existuje alespoň  $2k + 1$  vesměs různých kladných čísel, potom podle věty 6.3.3 je  $p(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ . To však je ve sporu s předpokladem. Tedy  $p(s)$  může mít maximálně  $2k$  různých kladných kořenů, a v důsledku toho musí být ve tvaru (6.18). ■

Obdobným způsobem lze dokázat analogickou větu pro případ  $\omega_1 = 0$ .

**Věta 6.3.6 (případ  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^-$ ,  $\omega_1 = 0$ ).** *Nechť  $p(s)$  je extrémální polynom množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(\langle P_i, \omega_i \rangle_{i=1}^k; \omega)$ , kde  $n \geq 2k$ ,  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k\}$ , potom je  $p(s)$  ve tvaru*

$$p(s) = P_1(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\tau_{2k-1} s + 1)^{n_{2k-1}}, \quad (6.19)$$

kde  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2k - 1$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{2k-1}$  a  $\sum_{i=1}^{2k-1} n_i \leq n$ .

## 6.4 Jednobodová interpolace

V tomto oddílu nalezneme úplné řešení problému extrémálních polynomů pro nejjednodušší případ, kdy počet interpolačních podmínek je roven jedné. Názorně řečeno ukážeme, že hranice množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1; \omega)$ ,  $\omega_1 > 0$  pro pevné  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq \omega_1$  je tvořena křivoúhelníkem s  $n$  nebo  $n + 1$  vrcholy a nalezneme explicitní vztahy pro přípustné polynomy odpovídající vrcholům a hranám tohoto křivoúhelníka.

Nejprve zopakujeme, že

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1; \omega) = \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1)\},$$

kde  $P_1 \in \mathbb{C} - (0, \infty)$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq \omega_1$  a  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1)$  je množina polynomů stupně maximálně  $n$  s reálnými nezápornými koeficienty, jejichž kořeny leží v intervalu  $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$  a které navíc splňují interpolační podmínku

$$p(j\omega_1) = P_1 \quad \arg p(j\omega_1) < 2\pi. \quad (6.20)$$



Připomeňme ještě, že polynomy patřící do  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1)$  nazýváme přípustnými polynomy.

Problém extrémálních polynomů, který nyní budeme řešit, lze zformulovat takto: Nalezněte všechny přípustné polynomy  $p(s)$  takové, že  $p(j\omega)$  je krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1; \omega)$ .

Z lemmatu 6.2.1 vyplývá, že se bez ztráty obecnosti můžeme omezit na případ  $P_1 = e^{j\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$  a  $\omega_1 = 1$ . Dále, poněvadž nás zajímají pouze extrémální polynomy množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ , stačí podle věty 6.3.5 zkoumat pouze přípustné polynomy ve tvaru

$$p(s) = p_{n_1 n_2 m}(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m, \quad (6.21)$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $m \geq 0$  a  $n_1 + n_2 + m \leq n$ . Pomocí interpolační podmínky (6.20) určíme nyní parametrizaci všech polynomů ve tvaru (6.21).

**Lemma 6.4.1 (Parametrizace).** *Polynom  $p(s)$  ve tvaru (6.21), kde  $k_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $m \geq 0$  a  $n_1 + n_2 + m \leq n$ , je přípustný polynom právě tehdy, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru*

$$p(s) = p_{n_1 n_2 m}(s, \alpha) = k_0(\alpha)[\tau_1(\alpha)s + 1]^{n_1}[\tau_2(\alpha)s + 1]^{n_2} s^m, \quad (6.22)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_1(\alpha) &= \tan(\alpha) \\ \tau_2(\alpha) &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha}{n_2} \\ k_0(\alpha) &= (\tau_1^2(\alpha) + 1)^{-\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2(\alpha) + 1)^{-\frac{n_2}{2}} \end{aligned}$$

a parametr  $\alpha$  probíhá interval

$$I_{n_1 n_2 m} = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - (m + n_2)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2} \right\rangle. \quad (6.23)$$

**Důkaz:** Nechť  $p(s)$  je přípustný polynom, tj.  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1)$ . Podle definice  $p(s)$  splňuje interpolační podmínku (6.20), která v tomto případě přejde na

$$p(j) = k_0(\tau_1 j + 1)^{n_1}(\tau_2 j + 1)^{n_2} j^m = e^{j\varphi}. \quad (6.24)$$

Odtud získáme úhlovou podmínku

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + m\frac{\pi}{2} = \varphi, \quad (6.25)$$

kde

$$\alpha_i = \arctan \tau_i \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (6.26)$$

a podmínku pro rovnost modulů

$$k_0 = (\tau_1^2 + 1)^{-\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2 + 1)^{-\frac{n_2}{2}} = (\tan^2 \alpha_1 + 1)^{-\frac{n_1}{2}} (\tan^2 \alpha_2 + 1)^{-\frac{n_2}{2}}. \quad (6.27)$$

Položme  $\alpha_1 \triangleq \alpha$ , kde  $\alpha$  je parametr. Z (6.25) nyní plyne

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha}{n_2} \quad (6.28)$$

a pomocí (6.26), (6.27) a (6.28) již obdržíme řešení rovnice (6.24) v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_1(\alpha) = \tan \alpha \\ \tau_2 &= \tau_2(\alpha) = \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha}{n_2} \\ k_0 &= k_0(\alpha) = (\tau_1^2 j + 1)^{-\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2 j + 1)^{-\frac{n_2}{2}},\end{aligned}$$

kde parametr  $\alpha$  musí splňovat následující podmínky:

$$\begin{aligned}\alpha &\in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \alpha &\in \left( \frac{\varphi - (m + n_2)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1} \right) \\ \alpha &\leq \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2}\end{aligned}$$

plynoucí po řadě z (6.26) a z předpokladu  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ . Spojením těchto podmínek obdržíme podmínku  $\alpha \in I_{n_1 n_2 m}$ , kde  $I_{n_1 n_2 m}$  je definován vztahem (6.23). Tím jsme dokázali, že libovolný přípustný polynom (6.21) lze vyjádřit v parametrickém tvaru (6.22). Obrácením výše uvedeného postupu lze důkaz snadno dokončit. ■

Pro dané indexy  $n_1, n_2$  a  $m$  lze tedy pomocí lemmatu 6.4.1 určit všechny přípustné polynomy ve tvaru (6.21) v parametrickém vyjádření (6.22). Všimněte si nyní oboru hodnot těchto polynomů pro  $s = j\omega$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ .

**Definice 6.4.1 (příčka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n((P_i, \omega_i)_{i=1}^k; \omega)$ ).** *Nechť  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $m \geq 0$  a  $n_1 + n_2 + m \leq n$ , potom orientovanou křivku  $p_{n_1 n_2 m}(j\omega, \alpha)$ ,  $\alpha \in I_{n_1 n_2 m}$  pro pevné  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , kde polynom  $p_{n_1 n_2 m}(s, \alpha)$  je definován vztahem (6.22) a interval  $I_{n_1 n_2 m}$  vztahem (6.23), případně doplněnou svými krajními body, budeme nazývat  $(n_1, n_2, m)$ -příčkou (případně příčkou  $(n_1, n_2, m)$  nebo jednoduše příčkou) množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Jestliže  $I_{n_1 n_2 m} = \emptyset$ , potom je  $(n_1, n_2, m)$ -příčka prázdná množina a budeme říkat, že příčka  $(n_1, n_2, m)$  neexistuje.*

Nechť  $\alpha_b$  a  $\alpha_f$  jsou po řadě počáteční a koncový bod intervalu  $I_{n_1 n_2 m}$ . Z (6.23) plyne

$$\alpha_b = \begin{cases} 0 & \text{pro } \varphi - (m + n_2)\frac{\pi}{2} < 0 \\ \frac{\varphi - (m + n_2)\frac{\pi}{2}}{n_1} & \text{pro } \varphi - (m + n_2)\frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

a

$$\alpha_f = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2}. \quad (6.30)$$

Body  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_b^+} p_{n_1 n_2 m}(j\omega, \alpha)$  a  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_f^-} p_{n_1 n_2 m}(j\omega, \alpha)$  jsou po řadě počáteční a koncový bod křivky  $p_{n_1 n_2 m}(j\omega, \alpha)$ ,  $\alpha \in I_{n_1 n_2 m}$  a podle definice oba patří do příčky  $(n_1, n_2, m)$ . Dále pro  $\alpha_b = 0$  je

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_b^+} p_{n_1 n_2 m}(s, \alpha) = k_0(0)[\tau_2(0)s + 1]^{n_2} s^m \quad (6.31)$$

a pro  $\alpha_b = \frac{\varphi - (m+n_2)\frac{\pi}{2}}{n_1}$  je

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_b^+} p_{n_1 n_2 m}(s, \alpha) = [\tau_1^2(\alpha_b) + 1]^{-\frac{n_1}{2}} [\tau_1(\alpha_b)s + 1]^{n_1} s^{m+n_2}. \quad (6.32)$$

Podobně pro koncový bod platí

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_f^-} p_{n_1 n_2 m}(s, \alpha) = k_0(\alpha_f) [\tau_1(\alpha_f)s + 1]^{n_1+n_2} s^m.$$

Tedy v každém případě krajní body příčky  $(n_1, n_2, m)$  odpovídají polynomům ve tvaru

$$q(s) = K_0(\tau s + 1)^u s^v, \quad (6.33)$$

kde  $u, v$  jsou přirozená čísla splňující podmínku  $u + v \leq n$ .

**Definice 6.4.2.** *Krajním bodům libovolné příčky  $(n_1, n_2, m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  budeme říkat uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  a budeme je označovat uspořádanou dvojicí  $(u, v)$  přirozených čísel, kde  $u, v$  jsou exponenty polynomu (6.33) příslušného k danému uzlu.*

Zavedené označení pro příčky a uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  bude pro nás výhodné především proto, že v sobě zahrnuje informaci o počtu, násobnosti a uspořádání (podle velikosti) kořenů odpovídajících přípustných polynomů. Konkrétně pro libovolný vnitřní bod  $(n_1, n_2, m)$ -příčky má odpovídající polynom  $p(s, \alpha)$ ,  $\alpha \in (\alpha_b, \alpha_f)$  tyto kořeny:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{\tau_1(\alpha)} \quad \text{s násobností } n_1 \\ s_2 &= -\frac{1}{\tau_2(\alpha)} \quad \text{s násobností } n_2 \\ s_3 &= 0 \quad \text{s násobností } m \end{aligned}$$

a platí

$$s_1 < s_2 < s_3.$$

Dále poznamenejme, že je-li uzel  $(u, v)$  počáteční bod příčky  $(n_1, n_2, m)$ , potom podle (6.29), (6.31) a (6.32) platí

$$u = n_2, \quad v = m \quad \text{pro} \quad \varphi - (m+n_2)\frac{\pi}{2} < 0 \quad (6.34)$$

nebo

$$u = n_1, \quad v = m + n_2 \quad \text{pro} \quad \varphi - (m+n_2)\frac{\pi}{2} \geq 0. \quad (6.35)$$

Skutečnost, že platí (6.34) resp. (6.35), budeme zapisovat následovně:

$$p.b. (n_1, n_2, m) = (n_2, m),$$

resp.

$$p.b. (n_1, n_2, m) = (n_1, m + n_2).$$

Jestliže uzel  $(u, v)$  je koncový bod příčky  $(n_1, n_2, m)$ , potom

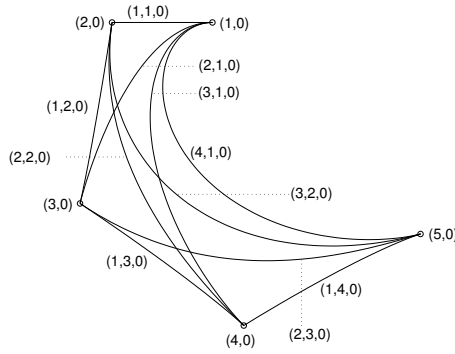
$$u = n_1 + n_2, \quad v = m. \quad (6.36)$$

Tuto skutečnost budeme zapisovat následovně:

$$k.b. (n_1, n_2, m) = (n_1 + n_2, m).$$

Zavedené označení pro uzly tedy umožňuje při znalosti  $\varphi$ , z daného označení příčky  $(n_1, n_2, m)$  určit označení jejího počátečního a koncového bodu a naopak.

**Příklad 1.** Příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^5(e^{j\frac{\pi}{3}}, 1; 10)$  jsou zobrazeny na obr.6.2.



Obrázek 6.2: Příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^5(e^{j\frac{\pi}{3}}, 1; 10)$

**Lemma 6.4.2.** *Nechť  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\omega > 0$  a  $\omega \neq 1$ , potom libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé  $(n_1, n_2, m)$ -příčce množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ .*

**Důkaz:** Nechť  $z \in \partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ , potom podle věty 6.3.5 existuje extrémální polynom  $p(s)$  ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $m \geq 0$ , takový, že  $p(j\omega) = z$ . Tím je důkaz proveden. ■

Tvrzení lemmatu 6.4.2 nelze obrátit, jak je patrné z obr. 6.2. Zřejmě existují příčky, které s možnou výjimkou svých krajních bodů, leží uvnitř množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Naším dalším cílem bude tedy popsat ty příčky, jejichž libovolný vnitřní bod je i vnitřním bodem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Definice 6.4.3.** *Příčku  $(n_1, n_2, m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  budeme nazývat vnitřní, jestliže její libovolný vnitřní bod je i vnitřním bodem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ .*

**Lemma 6.4.3.** *Nechť  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\omega > 0$  a  $\omega \neq 1$ , potom příčka  $(n_1, n_2, m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ , pro kterou platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

- (i)  $m = 0$ ,  $n_1 \geq 2$ ,  $n_2 \geq 2$

$$(ii) \quad m = 0, n_1 \geq 2, n_1 + n_2 < n$$

$$(iii) \quad m \geq 1, n_2 \geq 2$$

$$(iv) \quad m \geq 1, n_1 + n_2 + m < n,$$

je vnitřní příčka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Důkaz:** Nechť  $z_0$  je libovolný vnitřní bod příčky  $(n_1, n_2, m)$ , potom existuje polynom

$$q(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

takový, že  $k_0 > 0$  a  $0 < \tau_1 < \tau_2$ . Tedy  $q(s)$  má kořeny

$$s_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad \text{s násobností } n_1$$

$$s_2 = -\frac{1}{\tau_2} \quad \text{s násobností } n_2$$

$$s_3 = 0 \quad \text{s násobností } m$$

a platí

$$s_1 < s_2 < s_3 = 0.$$

Nyní rozlišíme čtyři případy podle toho, která z podmínek (i) – (iv) lemmatu je splněna:

1. Je-li splněna podmínka (i) položíme

$$p_\lambda(s) = q(s) + \lambda r(s)(s^2 + as + b), \quad (6.37)$$

kde

$$r(s) = (s^2 + 1)(s - s_1)^{n_1-2}(s - s_2)^{n_2-2} \quad (6.38)$$

a  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku

$$a^2 - 4b < 0. \quad (6.39)$$

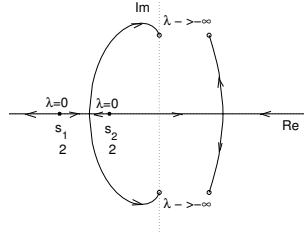
Všimněte si, že stupeň polynomu  $p_\lambda(s)$  je maximálně roven  $n$ , a poznamenejme ještě, že

$$\frac{q(s)}{r(s)(s^2 + as + b)} = c \frac{(s - s_1)^2 (s - s_2)^2}{(s^2 + 1)(s^2 + as + b)},$$

kde  $c > 0$  a kořeny polynomu  $(s^2 + as + b)$  jsou v důsledku platnosti podmínky (6.39) komplexní. Evansovou metodou geometrického místa kořenů aplikovanou na svazek polynomů (6.37) nyní snadno zjistíme (viz obr. 6.3), že pro libovolné  $a$  a  $b$ , které splňují (6.39), existuje  $\lambda_0(a, b) < 0$  takové, že pro  $\lambda \in (\lambda_0(a, b), 0)$  má polynom  $p_\lambda(s)$  všechny své kořeny v intervalu  $(-\infty, 0)$ , a je tedy podle lemmatu 6.2.3 prvkem množiny  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1)$ . Navíc je zřejmě funkce  $\lambda_0(a, b)$  spojitá na

$$Q = \{[a, b] : b > 0, a^2 - 4b < 0\}.$$

Tedy všechny předpoklady lemmatu 6.2.4 (pro  $k = 1$ ) jsou splněny, a tudíž bod  $q(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Odtud plyne, že příčka  $(n_1, n_2, m)$  je vnitřní.



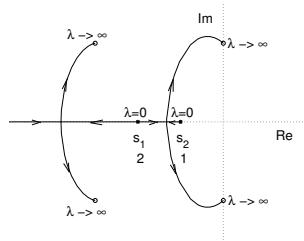
Obrázek 6.3: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37), (6.38),  $\lambda \in (-\infty, 0)$ .

Zcela analogicky lze provést důkaz v případě splnění podmínek (ii) – (iv). Z tohoto důvodu zde uvedeme pouze příslušnou volbu polynomu  $r(s)$ , interval pro parametr  $\lambda$  (buď  $\langle 0, +\infty \rangle$  nebo  $(-\infty, 0)$ ) a příslušný obrázek geometrického místa kořenů, z kterého vyplývá splnění předpokladů lemmatu 6.2.4.

2. Je-li splněna podmínka (ii), volíme

$$r(s) = (s^2 + 1)(s - s_1)^{n_1-2}(s - s_2)^{n_2-1}. \quad (6.40)$$

Zřejmě  $d(p_\lambda(s)) \leq n$ . Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$ , kde  $r(s)$  je polynom (6.40), je uvedeno na obr. 6.4.



Obrázek 6.4: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37), (6.40),  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$

3. Je-li splněna podmínka (iii), volíme

$$r(s) = (s^2 + 1)(s - s_1)^{n_1-1}(s - s_2)^{n_2-2}s^{m-1}. \quad (6.41)$$

Zřejmě  $d(p_\lambda(s)) \leq n$ . Geometrické místo kořenů svazku polynomu (6.37) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$ , kde  $r(s)$  je polynom (6.41), je uvedeno na obr. 6.5.

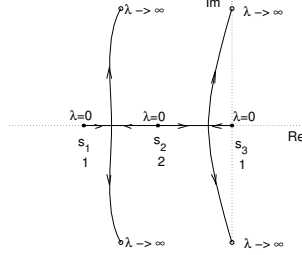
4. Je-li splněna podmínka (iv), volíme

$$r(s) = (s^2 + 1)(s - s_1)^{n_1-1}(s - s_2)^{n_2-1}s^{m-1}. \quad (6.42)$$

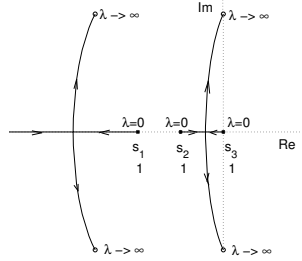
Zřejmě  $d(p_\lambda(s)) \leq n$ . Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37) pro  $\lambda \in \langle 0, \infty \rangle$ , kde  $r(s)$  je polynom (6.42) je uvedeno na obr. 6.6.

■

Lemma 6.4.3 nám umožňuje zesílit tvrzení lemmatu 6.4.2 do následující podoby:



Obrázek 6.5: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37), (6.41),  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$



Obrázek 6.6: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.37), (6.42),  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$

**Věta 6.4.1.** *Nechť  $\varphi > 0$ ,  $\varphi \in \langle l\frac{\pi}{2}, (l+1)\frac{\pi}{2} \rangle$ , kde  $l \in \{0, 1, 2, 3\}$  a  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , potom libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé přímce  $(n_1, n_2, m)$ ,  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, m \geq 0$  z následujícího seznamu*

$$\begin{aligned} & (1, l, 0), (1, l+1, 0), \dots, (1, n-1, 0), (n-1, 1, 0), \\ & (n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (n-l-1, 1, l). \end{aligned} \quad (6.43)$$

**Důkaz:** Nejprve stejně jako v lemmatu 6.4.3 předpokládejme  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , potom z lemmat 6.4.2 a 6.4.3 plyne, že libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé přímce  $(n_1, n_2, m)$ , pro kterou je následující logický výraz pravdivý

$$\overline{\pi_{(i)}} \vee \overline{\pi_{(ii)}} \vee \overline{\pi_{(iii)}} \vee \overline{\pi_{(iv)}}, \quad (6.44)$$

kde  $\pi_{(i)} \dots \pi_{(iv)}$  označují po řadě podmínky  $(i) \dots (iv)$  lemmatu 6.4.3. Výraz (6.44) lze přepsat do ekvivalentní podoby

$$\overline{\pi_{(i)}} \wedge \overline{\pi_{(ii)}} \wedge \overline{\pi_{(iii)}} \wedge \overline{\pi_{(iv)}}. \quad (6.45)$$

Dosazením za  $\pi_{(i)} \dots \pi_{(iv)}$  z  $(i) \dots (iv)$  a po úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} & (m > 0 \vee n_1 = 1 \vee n_2 = 1) \wedge (m > 0 \vee n_1 = 1 \vee n_1 + n_2 = n) \wedge \\ & \wedge (m = 0 \vee n_2 = 1) \wedge (m = 0 \vee n_1 + n_2 + m = n). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Výraz (6.46) je pravdivý zřejmě právě tehdy, jestliže je splněna alespoň jedna z následujících tří podmínek

$$m = 0, n_1 = 1 \quad (6.47)$$

$$m = 0, n_2 = 1, n_1 + n_2 = n \quad (6.48)$$

$$m > 0, n_2 = 1, n_1 + n_2 + m = n. \quad (6.49)$$

Podmínka (6.47) je splněna pro příčky

$$(1, 1, 0), (1, 2, 0), \dots, (1, n-1, 0), \quad (6.50)$$

podmínka (6.48) je splněna pro jedinou příčku

$$(n-1, 1, 0) \quad (6.51)$$

a konečně podmínka (6.49) je splněna pro příčky

$$(n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (n-4, 1, 3), \quad (6.52)$$

neboť  $m \leq 3$  (poněvadž uvažujeme  $\varphi < 2\pi$ ). Nyní uvažujme předpoklad  $\varphi > 0$ ,  $\varphi \in \langle l\frac{\pi}{2}, (l+1)\frac{\pi}{2} \rangle$ , kde  $l \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Zřejmě příčky  $(1, i, 0)$  pro  $1 \leq i < l$  jsou prázdné množiny, neboť  $\arg p_{1i0}(j\omega) < l\frac{\pi}{2}$  pro libovolný polynom  $p_{1i0}(j\omega)$  ve tvaru (6.21).

Tedy seznam (6.50) může být za uvedeného předpokladu redukován na

$$(1, l, 0), (1, l+1, 0), \dots, (1, n-1, 0). \quad (6.53)$$

Poznamenejme, že je-li  $l = 0$ , potom prvou trojici v seznamu (6.53) je nutno vypustit, poněvadž není splněna podmínka  $n_1 \geq 1$  a  $n_2 \geq 1$ . Podobně seznam (6.52) může být redukován na

$$(n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (n-l-1, 1, l), \quad (6.54)$$

neboť  $\arg p_{n-i-11i}(j\omega) \geq (l+1)\frac{\pi}{2}$  pro  $i \geq l+1$  a libovolný polynom  $p_{n-i-11i}(s)$ . Dokázali jsme tedy, že libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce  $(n_1, n_2, m)$ ,  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$  obsažené v seznamech (6.53), (6.51) a (6.54). Spojením těchto seznamů obdržíme seznam (6.43). Tím je důkaz dokončen. ■

Věta 6.4.1 obsahuje úplné řešení problému extrémálních polynomů množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro obecný případ  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Nyní ve formě důsledků věty 6.4.1 uvedeme tvrzení v podobě vhodné pro návrh robustních regulátorů. Za tím účelem rozlišme tři případy:  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  a  $\varphi \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ .

**Případ  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ :** Pro tento případ z věty 6.4.1 plyne, že libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce ze seznamu

$$(1, 1, 0), (1, 2, 0), \dots, (1, n-1, 0), (n-1, 1, 0). \quad (6.55)$$

Z (6.34)–(6.36) plyne, že pro  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  platí

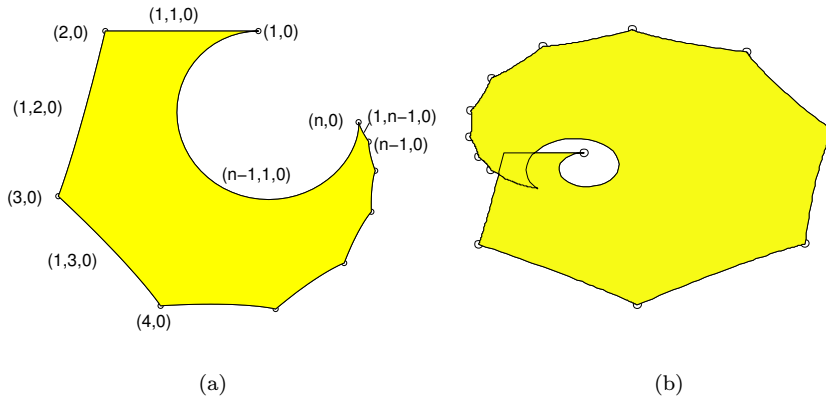
$$\begin{aligned} k.b.(1, i, 0) &= p.b.(1, i+1, 0) = (i+1, 0) \\ p.b.(n-1, 1, 0) &= p.b.(1, 1, 0) = (1, 0) \\ k.b.(n-1, 1, 0) &= k.b.(1, n-1, 0) = (n, 1), \end{aligned}$$

kde  $i = 1, 2, \dots, n-2$ . Odtud plyne, že příčky ze seznamu (6.55) tvoří dohromady uzavřenou po částech hladkou orientovanou křivku  $\mathcal{H}$ , která obsahuje  $\partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  jako svoji podmnožinu (viz obr. 6.4a). Nejprve předpokládejme, že  $\mathcal{H}$  sama sebe neprotíná, potom křivka  $\mathcal{H}$  zřejmě rozděljuje komplexní rovinu



$\mathbb{C}$  na dvě otevřené oblasti  $\mathcal{O}_1$  a  $\mathcal{O}_2$ , z nichž jedna řekněme  $\mathcal{O}_1$  je omezená. Poněvadž  $\partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega) \subset \mathcal{H}$ , musí zřejmě být  $cl \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega) = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{H}$  nebo  $cl \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega) = \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{H}$ . Poněvadž však zřejmě existuje bod  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$  takový, že  $z \notin \mathcal{O}_2$  musí být  $cl \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega) = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{H}$ . Tím jsme dokázali, že  $cl \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je křivoúhelník se stranami (6.55) a s vrcholy

$$(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0). \quad (6.56)$$



Obrázek 6.7: a) Křivoúhelník ohraničující množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ; b) křivoúhelník tvořený příčkami (6.55) se může překrývat

V obecném případě může křivka  $\mathcal{H}$  (pro dostatečně velké  $\omega$ ) sama sebe protínat a věci mohou být poněkud komplikovanější (viz obr. 6.4b). V každém případě však platí následující důsledek věty 6.4.1.

**Důsledek 6.4.1** ( $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ). *Nechť  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , potom libovolný extrémální polynom  $p(s)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , je buď ve tvaru*

$$p(s) = k_0(\tau s + 1)^i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $\tau > 0$ , nebo ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2},$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a uspořádaná dvojice exponentů  $(n_1, n_2)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n-1), (n-1, 1).$$

**Případ  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ :** Pro tento případ z věty 6.4.1 plyne, že libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce ze seznamu

$$(1, 1, 0), (1, 2, 0), \dots, (1, n-1, 0), (n-1, 1, 0), (n-2, 1, 1). \quad (6.57)$$

Podobně jako v předcházejícím případě vytváří příčky (6.57) uzavřenou po částech hladkou orientovanou křivku  $\mathcal{H}$ , která obsahuje  $\partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  jako svoji

podmnožinu. Přesněji křivka  $\mathcal{H}$  v tomto případě vytváří křivoúhelník s  $n+1$  stranami odpovídajícími příčkám (6.57) a  $n+1$  vrcholy

$$(1, 1), (2, 0), (3, 0), \dots, (n, 0), (n-1, 1) \quad (6.58)$$

odpovídajícími krajním bodům příček (6.57).

**Důsledek 6.4.2** ( $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ ). *Nechť  $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ , potom libovolný extrémální polynom  $p(s)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$  je buď ve tvaru*

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice exponentů  $(n_1, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 1), (2, 0), (3, 0), \dots, (n, 0), (n-1, 1),$$

anebo ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a uspořádaná trojice exponentů  $(n_1, n_2, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 1, 0), (1, 2, 0), \dots, (1, n-1, 0), (n-1, 1, 0), (n-2, 1, 1).$$

Pro naše další účely bude důležité znát i hranici množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  a její extrémální polynomy. Obdobným způsobem jako v předcházejícím důsledku lze dokázat, že libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce z následujícího seznamu

$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, n-2, 1), (n-2, 1, 1). \quad (6.59)$$

Hranice  $\partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je tedy křivoúhelník s  $n-1$  vrcholy

$$(1, 1), (2, 1), \dots, (n-1, 1).$$

**Důsledek 6.4.3** ( $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ ). *Nechť  $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ , potom libovolný extrémální polynom  $p(s)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-,1}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$  je buď ve tvaru*

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice exponentů  $(n_1, m)$  je v následujícím  $n-1$  členném seznamu

$$(1, 1), (2, 1), \dots, (n-1, 1),$$

anebo ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a uspořádaná trojice exponentů  $(n_1, n_2, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, n-2, 1), (n-2, 1, 1).$$

**Případ  $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ :** Analogickým způsobem jako v předchozích případech obdržíme následující důsledky věty 6.4.1.

**Důsledek 6.4.4** ( $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ ). Nechť  $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ , potom libovolný extrémální polynom  $p(s)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$  je buď ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice exponentů  $(n_1, m)$  je v následujícím  $n + 1$  členném seznamu

$$(1, 2), (3, 0), (4, 0), \dots, (n, 0), (n - 1, 1), (n - 2, 2),$$

anebo ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a uspořádaná trojice exponentů  $(n_1, n_2, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 2, 0), (1, 3, 0), \dots, (1, n - 1, 0), (n - 1, 1, 0), (n - 2, 1, 1), (n - 3, 1, 2).$$

**Důsledek 6.4.5** ( $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ ). Nechť  $\varphi \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ , potom libovolný extrémální polynom  $p(s)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-, -1}^n(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$  je buď ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice exponentů  $(n_1, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 2), (2, 1), \dots, (n - 1, 1), (n - 2, 2),$$

anebo ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a uspořádaná trojice exponentů  $(n_1, n_2, m)$  je v následujícím seznamu

$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, n - 2, 1), (n - 2, 1, 1), (n - 3, 1, 2).$$

## 6.5 Dvoubodová interpolace: případ $\omega_1 = 0$

V tomto oddílu nalezneme explicitní popis všech extrémálních polynomů pro případ dvou interpolačních podmínek v bodech  $s_1 = j\omega_1 = 0$  a  $s_2 = j\omega_2$ . Ukážeme, že hranice množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, 0; P_2, \omega_2; \omega)$  pro  $\omega > 0, \omega \neq \omega_2$  je tvořena křivoúhelníkem s  $n - 1$  nebo  $n$  vrcholy a nalezneme explicitní tvar přípustných polynomů odpovídajících vrcholům a stranám tohoto křivoúhelníka.

### Jednobodová interpolace : případ $\omega_1 = 0$

V tomto odstavci explicitně popíšeme hranici množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$  a dokážeme některá pomocná tvrzení, která užijeme později. Poněvadž nás zajímají pouze hraniční body množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ , stačí podle věty 6.3.6 uvažovat přípustné polynomy pouze ve tvaru

$$p_k(s, \tau) \triangleq (\tau s + 1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.60)$$

kde  $\tau \geq 0$ . Protože libovolný polynom ve tvaru (6.60) současně splňuje interpolační podmínku

$$p_k(j0, \tau) = 1,$$

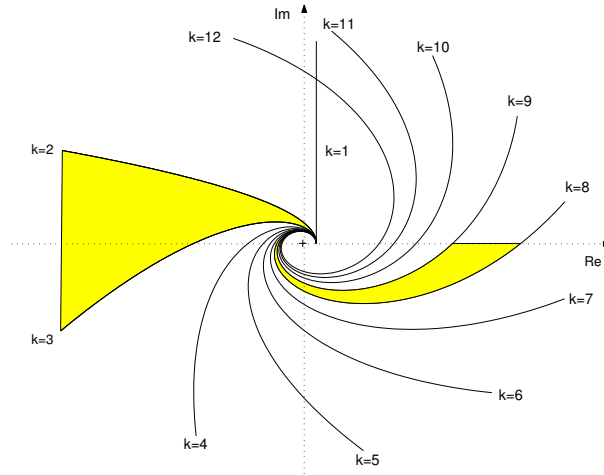
je zřejmé, že všechny hraniční body množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$  musí ležet na křivkách

$$p_k(j\omega, \tau) = (\tau j\omega + 1)^k, \quad (6.61)$$

kde  $\tau$  probíhá interval  $\langle 0, +\infty \rangle$  a  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definice 6.5.1.** *Orientovanou křivku (6.61) budeme nazývat  $k$ -příčkou nebo příčkou  $k$  nebo jen příčkou množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$  a budeme ji označovat  $\mathcal{L}_k$ .*

Všechny příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{12}(1, 0; \omega)$  jsou pro ilustraci zobrazeny na obr. 6.8. Všimněte si, že libovolné dvě příčky s výjimkou svého počátku nemají žádný společný bod  $z$ , pro který platí  $\arg z < 2\pi$ . Tato skutečnost, jak uvidíme dále, platí obecně.



Obrázek 6.8: Příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{12}(1, 0; \omega)$  a buňky  $\mathcal{B}_2$  a  $\mathcal{B}_8$

Příčka  $\mathcal{L}_k$  je zřejmě definovaná též parametrickou rovnicí

$$z = (\tau j + 1)^k, \quad \tau \in \langle 0, +\infty \rangle$$

nebo

$$z = (\tan \alpha j + 1)^k, \quad \alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad (6.62)$$

kde  $k = 1, 2, \dots, n$ . Označme

$$\mathbb{Z} = \{z : z \in \mathbb{C} - \{0\}, \arg z \in (0, 2\pi)\} \quad (6.63)$$

a definujme

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \mathcal{L}_k \cap \mathbb{Z}$$

pro  $k = 1, 2, \dots, n$ . Křivka  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  je zřejmě počáteční část křivky  $\mathcal{L}_k$  (bez počátečního bodu) ležící v  $\mathbb{Z}$  a může být, jak plyne z (6.62), definována též parametricky následujícím způsobem:

$$z = (\tan \alpha j + 1)^k, \quad \alpha \in (0, \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{k}\}) \quad (6.64)$$

pro  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Lemma 6.5.1.** *Křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  se neprotínají. Navíc, křivka  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  leží napravo od křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .*

**Důkaz :** Zřejmě stačí dokázat, že se křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  a  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$  neprotínají, a že křivka  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  leží napravo od křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$  pro  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ . Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že se křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  a  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$  protínají, potom existují podle (6.64)  $\alpha \in (0, \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{k}\})$  a  $\beta \in (0, \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{k+1}\})$  takové, že

$$(j \tan \alpha + 1)^k = (j \tan \beta + 1)^{k+1}. \quad (6.65)$$

Odtud plyne

$$k\alpha = (k+1)\beta$$

neboli

$$\alpha = \frac{k+1}{k}\beta. \quad (6.66)$$

Dále z (6.65) plyne

$$(\tan^2 \alpha + 1)^{\frac{k}{2}} = (\tan^2 \beta + 1)^{\frac{k+1}{2}}.$$

Dosazením za  $\alpha$  z (6.66) obdržíme

$$\left[ \tan^2 \left( \frac{k+1}{k}\beta \right) + 1 \right]^{\frac{k}{2}} = (\tan^2 \beta + 1)^{\frac{k+1}{2}} \quad (6.67)$$

a užitím identity

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

z (6.67) dostaneme

$$\frac{1}{\cos^k \left( \frac{k+1}{k}\beta \right)} = \frac{1}{\cos^{k+1} \beta}$$

neboli

$$\frac{\cos^{k+1} \beta}{\cos^k \left( \frac{k+1}{k}\beta \right)} = 1. \quad (6.68)$$

Nyní položíme

$$f(\beta) \triangleq \frac{\cos^{k+1} \beta}{\cos^k \left( \frac{k+1}{k}\beta \right)}. \quad (6.69)$$

Zřejmě platí  $f(0) = 1$ . Derivováním  $f(\beta)$  a jednoduchou úpravou obdržíme

$$f'(\beta) = f(\beta) \frac{(k+1) \sin \left[ \left( \frac{k+1}{k} - 1 \right) \beta \right]}{\cos \beta \cos \left( \frac{k+1}{k}\beta \right)}, \quad (6.70)$$

kde podle předpokladu je  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  a  $\frac{k+1}{k}\beta < \frac{\pi}{2}$  a tedy též

$$0 < \frac{k+1}{k}\beta - \beta = \left(\frac{k+1}{k} - 1\right)\beta < \frac{\pi}{2}. \quad (6.71)$$

Z (6.69), (6.70) a (6.71) je nyní zřejmé, že

$$f'(x) > 0$$

pro libovolné  $x \in (0, \beta)$ , a tedy

$$f(\beta) = f(0) + \int_0^\beta f'(x)dx > 1. \quad (6.72)$$

To však je spor s (6.68). Křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  a  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$  se tedy neprotínají. Dále z (6.72) plyne, že

$$\left|j \tan\left(\frac{k+1}{k}\beta\right) + 1\right|^k > |j \tan \beta + 1|^{k+1}$$

pro všechny  $\beta$  splňují podmínku  $0 < \frac{k+1}{k}\beta < \frac{\pi}{2}$ , a tedy křivka  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  leží napravo od křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$ . ■

Z lemmatu 6.5.1 plyne, že křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  a kladná reálná osa vymezují v komplexní rovině určité disjunktní oblasti. Např. na obr. 6.8 je vyznačena oblast  $\mathcal{B}_2$  ohraničená křivkami  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  a  $\tilde{\mathcal{L}}_3$  a oblast  $\mathcal{B}_8$  ohraničená křivkami  $\tilde{\mathcal{L}}_8$  a  $\tilde{\mathcal{L}}_9$ . Těmito oblastem budeme říkat buňky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ .

**Definice 6.5.2.** *Otevřenou oblast komplexní roviny  $\mathcal{B}_k$  ohraničenou křivkami  $\tilde{\mathcal{L}}_k$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$  a případně kladnou reálnou osou  $\mathbb{R}^+$  tak, že oblast  $\mathcal{B}_k$  leží nalevo od orientované křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_k$  a napravo od orientované křivky  $\tilde{\mathcal{L}}_{k+1}$ , budeme nazývat  $(1, k)$ -buňkou množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ .*

**Lemma 6.5.2.** *Libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$  leží buď na příčce  $\mathcal{L}_1$  nebo  $\mathcal{L}_n$ .*

**Důkaz :** Je-li  $n = 1$  nebo  $n = 2$ , není co dokazovat. V případě  $n > 2$ , zřejmě stačí dokázat, že libovolný bod  $z$  ve tvaru

$$z = p_k(j\omega, \tau) \triangleq (\tau j\omega + 1)^k,$$

kde  $\tau > 0$  a  $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$  je vnitřním bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ . Položme

$$p_\lambda(s) = (\tau s + 1)^k + \lambda s(\tau s + 1)^{k-2}(s^2 + as + b), \quad (6.73)$$

kde  $\tau > 0$ ,  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku

$$a^2 - 4b < 0. \quad (6.74)$$

Poznamenejme, že  $d(p_\lambda(s)) \leq n$  pro libovolné  $k = 2, 3, \dots, n-1$ . Evansonovou metodou geometrického místa kořenů svazku polynomů (6.73), pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  nyní snadno zjistíme (viz obr. 6.9), že pro libovolná  $a, b$  splňující (6.74) existuje spojité funkce  $\lambda_0(a, b)$  taková, že pro libovolné  $\lambda \in \langle 0, \lambda_0(a, b) \rangle$  leží všechny kořeny polynomu  $p_\lambda(s)$  v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Tedy z lemmatu 6.2.3 plyne, že

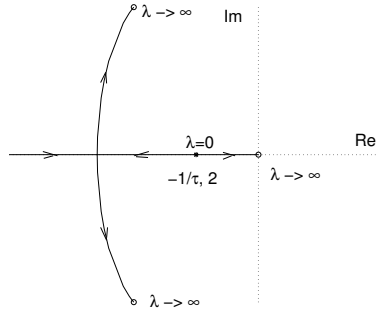
$p_\lambda(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0)$  pro všechny  $\lambda \in (0, \lambda_0(a, b))$ . K dokončení důkazu uijeme lemma 6.2.4 Poněvadž pro

$$q(s) = (\tau s + 1)^k$$

a

$$r(s) = s(\tau s + 1)^{k-2}$$

jsou splněny všechny jeho předpoklady, je  $(\tau j\omega + 1)^k$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ . Tím je důkaz dokončen. ■



Obrázek 6.9: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.72),  $\lambda \in (0, +\infty)$

Uvažujme nyní přípustný polynom ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}, \quad (6.75)$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $n_1 + n_2 \leq n$  a definujme

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0) \triangleq \{p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0) : p(s) \text{ je ve tvaru (6.75)}\} \quad (6.76)$$

a

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega) \triangleq \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0)\} \quad (6.77)$$

pro  $\omega > 0$ . Pro další účely bude užitečné znát hranici množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ .

**Lemma 6.5.3.** *Libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ ,  $n_1, n_2 \geq 1$  leží na přímce  $n_2$  nebo na přímce  $n_1 + n_2$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ , kde  $n \geq n_1 + n_2$ .*

**Důkaz :** Necht  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0)$ , potom je  $p(s)$  podle definice ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2},$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ . Je-li  $0 < \tau_1 < \tau_2$ , potom podle věty 6.3.4 je  $p(j\omega)$  vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ . Pro hraniční bod  $z = p(j\omega) \in \partial \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$  musí tedy platit alespoň jedna z následujících dvou podmínek

$$\tau_1 = 0 \quad (6.78)$$

nebo

$$\tau_1 = \tau_2. \quad (6.79)$$

Je-li splněna podmínka (6.78), obdržíme

$$p(s) = (\tau_2 s + 1)^{n_2}$$

a bod  $p(j\omega)$  leží na příčce  $n_2$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ ,  $n \geq n_1 + n_2$ . Podobně je-li splněna podmínka (6.79), dostaneme

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1 + n_2}$$

a bod  $p(j\omega)$  leží na příčce  $n_1 + n_2$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ ,  $n \geq n_1 + n_2$ . ■

Poznamenejme pro názornost, že z lematu 6.5.3 a definice 6.5.2 plyne, že množina  $(\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,k}(1, 0; \omega) \cap \mathbb{Z})^\circ$ , kde množina  $\mathbb{Z}$  je definována vztahem (6.63), je  $(1, k)$ -buňka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ , kde  $n \geq k + 1$ .

### Uzly množiny $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$

**Definice 6.5.3 (Uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ).** Každý bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$  odpovídající polynomu ve tvaru (6.75) budeme nazývat uzlem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Lemma 6.5.4.** Necht  $re^{j\varphi} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ , kde  $\omega > 0$ ,  $r > 1$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , potom existuje právě jeden polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0)$  ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}, \quad (6.80)$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ , splňující interpolační podmínku

$$\left. \begin{array}{l} p(j\omega) = r e^{j\varphi} \\ \arg p(j\omega) < 2\pi \end{array} \right\} \quad (6.81)$$

Tento polynom lze pro případ  $\omega = 1$  určit následovně:

$$\tau_1 = \tan \alpha \quad (6.82)$$

$$\tau_2 = \tan \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2}, \quad (6.83)$$

kde  $\alpha$  je jediné řešení rovnice

$$\left( \tan^2 \alpha + 1 \right)^{\frac{n_1}{2}} \left( \tan^2 \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2} + 1 \right)^{\frac{n_2}{2}} = r \quad (6.84)$$

v intervalu

$$I_{n_1 n_2} = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi}{n_1 + n_2} \right\rangle \quad (6.85)$$



**Důkaz :** Z definice množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$  plyne, že existuje alespoň jeden polynom ve tvaru (6.80) splňující interpolační podmínku (6.81). Zbývá tedy dokázat, že existuje právě jeden takovýto polynom. Bez ztráty obecnosti předpokládáme  $\omega = 1$ , potom z interpolační podmínky (6.81) obdržíme

$$(\tau_1 j + 1)^{n_1} (\tau_2 j + 1)^{n_2} = r e^{j\varphi}. \quad (6.86)$$

Odtud

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 = \varphi, \quad (6.87)$$

kde

$$\alpha_i \triangleq \arctan \tau_i \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad i = 1, 2 \quad (6.88)$$

a dále

$$(\tau_1^2 + 1)^{\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2 + 1)^{\frac{n_2}{2}} = r. \quad (6.89)$$

Rovnice (6.87) a (6.89) tvoří soustavu pro dvě neznámé  $\tau_1$  a  $\tau_2$ . Zvolme  $\alpha \triangleq \alpha_1$  jako parametr, potom z (6.87) plyne

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2}. \quad (6.90)$$

Z podmínek (6.88) a vztahu (6.90) získáme další omezení na parametr  $\alpha$

$$\alpha \in \left\langle \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi}{n_1} \right\rangle. \quad (6.91)$$

Nyní z (6.88), (6.90) a (6.91) plyne, že libovolné řešení rovnice (6.86) splňující úhlovou podmínku (6.87) je ve tvaru

$$\tau_1 = \tau_1(\alpha) = \tan \alpha \quad (6.92)$$

$$\tau_2 = \tau_2(\alpha) = \tan \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2}, \quad (6.93)$$

kde

$$\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi}{n_1} \right\rangle. \quad (6.94)$$

Poněvadž nás zajímají pouze ta řešení rovnice (6.86), pro která platí  $\tau_1 \leq \tau_2$ , zřejmě stačí uvažovat

$$\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cap \left\langle \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi}{n_1 + n_2} \right\rangle \triangleq I_{n_1 n_2},$$

neboť pro  $\alpha = \frac{\varphi}{n_1 + n_2}$  je  $\tau_1 = \tau_2$ . Pro krajní body  $\alpha_b, \alpha_f$  v intervalu  $I_{n_1 n_2}$  zřejmě platí:

$$\alpha_b = \max\left\{0, \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \varphi - n_2 \frac{\pi}{2} \leq 0 \\ \frac{\varphi - n_2 \frac{\pi}{2}}{n_1} & \text{pro } \varphi - n_2 \frac{\pi}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\alpha_f = \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\varphi}{n_1 + n_2}\right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } \varphi \geq (n_1 + n_2) \frac{\pi}{2} \\ \frac{\varphi}{n_1 + n_2} & \text{pro } \varphi < (n_1 + n_2) \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Nyní hledíme hodnotu parametru  $\alpha \in I_{n_1 n_2}$  tak, aby byla splněna amplitudová podmínka (6.89) a v důsledku toho i rovnice (6.86). Označme

$$f(\alpha) = (\tau_1^2(\alpha) + 1)^{\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2(\alpha) + 1)^{\frac{n_2}{2}},$$

kde  $\tau_1(\alpha)$  a  $\tau_2(\alpha)$  jsou dány po řadě vztahy (6.92) a (6.93). Přímým výpočtem určíme, že pro  $\alpha \in I_{n_1 n_2}$  platí

$$f'(\alpha) = n_1 e^{[-n_1 \ln(\cos \alpha) - n_2 \ln(\cos \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2})]} \left( \tan \alpha - \tan \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2} \right).$$

Odtud je zřejmé, že funkce  $f(\alpha)$  je klesající na vnitřku intervalu  $I_{n_1 n_2}$ , neboť je-li  $\alpha \in (I_{n_1 n_2})^\circ$ , potom

$$0 \leq \alpha < \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2} < \frac{\pi}{2},$$

a tedy

$$\tan \alpha - \tan \frac{\varphi - n_1 \alpha}{n_2} < 0.$$

Rovnice

$$f(\alpha) = r$$

má tedy v intervalu  $(\alpha_b, \alpha_f)$  nejvýše jedno řešení. Odtud již plyne tvrzení lemmatu. ■

Každý uzel množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je tedy jednoznačně reprezentován uspořádanou dvojicí  $(n_1, n_2)$ .

Následující lemma charakterizuje všechny uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ .

**Lemma 6.5.5 (Seznam uzlů).** *Nechť  $z = re^{j\varphi}$ , kde  $r > 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $n \geq m + 1$ , potom existuje právě  $m(n - m)$  různých polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  ve tvaru*

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}, \quad (6.95)$$

kde  $0 < \tau_1 < \tau_2, n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ . Tyto polynomy jsou navíc jednoznačně určeny následujícím  $m(n - m)$  členným seznamem uspořádaných dvojic  $(n_1, n_2)$  jejich exponentů  $n_1$  a  $n_2$ :

$$\begin{array}{cccc} (m, 1) & (m - 1, 2) & \dots & (1, m) \\ (m + 1, 1) & (m, 2) & \dots & (2, m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n - 1, 1) & (n - 2, 2) & \dots & (n - m, m). \end{array} \quad (6.96)$$

Jinými slovy, dvojice exponentů  $(n_1, n_2)$  je prvkem seznamu (6.96) právě tehdy, jestliže  $n_1 + n_2 > m$  a  $n_2 \leq m$ .

**Důkaz** Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady lemmatu. Poněvadž  $z$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; \omega)$ , nemůže podle lemmatu 6.5.3 ležet na žádné příčce množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$ . Odtud plyne, že je-li polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  ve tvaru (6.95), musí být  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Bez ztráty obecnosti předpokládejme  $0 < \tau_1 < \tau_2$ , odtud plyne  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0)$ , a tedy  $z = p(j\omega) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$  pro některé indexy  $n_1 \geq 1$  a  $n_2 \geq 1$ .

Hlavní myšlenka jak nyní určit počet různých polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; z, \omega)$  ve tvaru (6.95) je velmi jednoduchá: Je-li  $z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ , potom lze snadno určit všechny dvojice indexů  $n_1 \geq 1$  a  $n_2 \geq 1$ , pro které je  $z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ . Podle lemmatu 6.5.4 pro každou takovou dvojici  $(n_1, n_2)$  existuje právě jeden polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; z, \omega)$  ve tvaru (6.95). Počet těchto dvojic je tedy roven počtu různých polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; z, \omega)$  ve tvaru (6.95). Z předpokladu  $z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; \omega)$  plyne podle lemmatu 6.5.3, že bod  $z$  leží napravo od příčky  $m+1$  a nalevo od příčky  $m$ . Odtud plyne podle lemmatu 6.5.1, že bod  $z$  leží též napravo od libovolné příčky  $k$ ,  $k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$  a nalevo od libovolné příčky  $l$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Tedy podle lemmatu 6.5.3 je  $z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{k-l, l}(1, 0; \omega)$  pro všechny  $k \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$  a  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$  a žádné jiné. Všechny dvojice  $n_1, n_2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $n_1 + n_2 \leq m$ , pro které je  $z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; \omega)$ , je tedy  $m(n-m)$  a jsou to zřejmě právě všechny dvojice  $(n_1, n_2)$  uvedené v seznamu (6.96). Navíc zřejmě platí, že  $(n_1, n_2)$  je v seznamu (6.96) právě tehdy, jestliže  $n_1 + n_2 > m$  a  $n_2 \leq m$ .

■

**Poznámka :** Je-li  $z = re^{j\varphi}$ ,  $r > 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$  krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $n \geq m+1$ , potom mohou podle lemmatu 6.5.3 nastat právě dva případy:

- (i) Bod  $z$  leží na příčce  $m$ . V tomto případě polynomy příslušné poslednímu sloupci seznamu (6.96) degenerují na jediný polynom

$$p(s) = (\tau s + 1)^m,$$

který obdržíme z (6.95) pro  $\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$ .

- (ii) Bod  $z$  leží na příčce  $m+1$ . V tomto případě polynomy příslušné dvojicím

$$(m+1, 1), (m+1, 2), \dots, (m+1, \min\{m, n-m-1\})$$

seznamu (6.96) degenerují na jediný polynom

$$p(s) = (\tau s + 1)^{m+1},$$

který obdržíme z (6.95) pro  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ .

**Lemma 6.5.6 (Vnitřní uzly).** *Nechť polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$ , kde  $r > 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , je ve tvaru*

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}, \quad (6.97)$$

kde  $n_1 \geq 2$ ,  $n_2 \geq 2$ ,  $n_1 + n_2 < n$  a  $0 < \tau_1 < \tau_2$ , potom  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , pro libovolné  $\omega > 0$  a  $\omega \neq 1$ .

**Důkaz :** Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady dokazovaného lemmatu. Položme

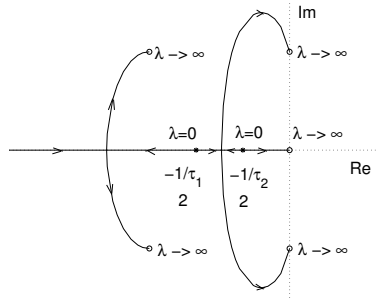
$$p_\lambda = p(s) + \lambda s(s^2 + 1)(\tau_1 s + 1)^{n_1-2}(\tau_2 s + 1)^{n_2-2}(s^2 + as + b), \quad (6.98)$$

kde  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku

$$a^2 - 4b < 0. \quad (6.99)$$

Poznamenejme, že tato podmínka zaručuje, že kořeny polynomu  $s^2 + as + b$  jsou komplexní (neleží na reálné ose). Evansovou metodou geometrického místa kořenů svazku polynomů (6.98) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  snadno zjistíme (viz obr. 6.10), že pro libovolná  $a$  a  $b > 0$ , která splňují (6.99) existuje  $\lambda_0(a, b)$  takové, že pro všechny  $\lambda \in \langle 0, \lambda_0(a, b) \rangle$  leží všechny kořeny polynomu  $p_\lambda(s)$  v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Navíc funkce  $\lambda_0(a, b)$  je zřejmě spojitá. Podle lemmatu 6.2.3 je tedy  $p_\lambda(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  pro všechny  $\lambda \in \langle 0, \lambda_0(a, b) \rangle$ . Nyní k dokončení důkazu užijeme lemma 6.2.4. Snadno ověříme, že jsou splněny všechny jeho předpoklady, a tedy  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$  a  $\omega \neq 1$ .

■



Obrázek 6.10: Geometrické místo kořenů svazku polynomů(6.98) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$

**Definice 6.5.4.** Uzel  $(n_1, n_2)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $r > 0, \omega > 0, \omega \neq 1$ , splňující podmínky

$$n_1 \geq 2, n_2 \geq 2, n_1 + n_2 < n$$

budeme nazývat vnitřním uzlem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Uzel množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , který není vnitřním uzlem, budeme nazývat vrcholem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$**

Nyní se budeme zabývat polynomy  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$ , kde  $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$ , ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3}, \quad (6.100)$$

kde  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3, n_i \geq 1, i = 1, 2, 3$  a  $\sum_{i=1}^3 n_i \leq n$ .

Pro pevná  $n_1, n_2, n_3$  označme

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1) \triangleq \{p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1) : p(s) \text{ je ve tvaru (6.100)}\} \quad (6.101)$$

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega) \triangleq \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(1, 0; re^{j\varphi}, 1)\} \quad (6.102)$$

**Lemma 6.5.7.** *Množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , má následující vlastnosti:*

- (i)  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je uzavřená množina.
- (ii)  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je buď prázdná množina nebo je sjednocením konečného počtu grafů křivek  $\mathcal{K}_i, i = 1, 2, \dots, l$  v komplexní rovině. Tj.

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega) = \cup_{i=1}^l \mathcal{K}_i.$$

- (iii) *Je-li z krajní bod křivky  $\mathcal{K}_{i_0}, i_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$  a  $z = p(j\omega)$  pro polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$ , potom  $p(s)$  je v jednom z následujících tvarů*

$$\begin{aligned} p(s) &= (\vartheta_1 s + 1)^{n_2} (\vartheta_2 s + 1)^{n_3} \\ p(s) &= (\vartheta_1 s + 1)^{n_1 + n_2} (\vartheta_2 s + 1)^{n_3} \\ p(s) &= (\vartheta_1 s + 1)^{n_1} (\vartheta_2 s + 1)^{n_2 + n_3}, \end{aligned}$$

kde  $0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2$ . Jinými slovy : bod  $z$  je některý z uzlů  $(n_2, n_3)$ ,  $(n_1 + n_2, n_3)$ ,  $(n_1, n_2 + n_3)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; 1)$ .

**Důkaz:** Množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je podle definice obor hodnot všech polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  pro konstantní hodnotu nezávisle proměnné  $s = j\omega$ . Hledejme tedy nejprve všechny polynomy  $p(s)$  ve tvaru (6.100) splňující interpolační podmínku

$$(\tau_1 j + 1)^{n_1} (\tau_2 j + 1)^{n_2} (\tau_3 j + 1)^{n_3} = re^{j\varphi}. \quad (6.103)$$

Uvažujeme (6.103) jako rovnici s parametrem  $\tau_3$  pro neznámé  $\tau_1$  a  $\tau_2$ , potom z lemmatu 6.5.3 plyne, že (6.103) má jediné řešení splňující podmínku

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \quad (6.104)$$

právě tehdy, jestliže

$$w(\tau_3) \triangleq \frac{re^{j\varphi}}{(\tau_3 j + 1)^{n_3}} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2}(1, 0; 1) \quad (6.105)$$

Podmínku (6.105) lze interpretovat (podle lemmatu 6.5.1 a lemmatu 6.5.3) tak, že  $w(\tau_3)$  leží napravo od příčky  $n_1 + n_2$  a nalevo od příčky  $n_2$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; \omega)$  a nebo na jedné z těchto příček. Odtud a ze spojitosti funkce  $w(\tau_3)$  plyne, že rovnice (6.103) má řešení splňující podmínku (6.104) právě tehdy, jestliže  $\tau_3$  leží v konečném počtu uzavřených intervalů  $I_i, i = 1, 2, \dots, l$ , neboť pro dostatečně velké  $\tau_3$  je zřejmě  $w(\tau_3) \notin \mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; 1)$ . Odtud již obdržíme tvrzení (i) a (ii) dokazovaného lemmatu. Nyní necht'  $\tau_3^*$  je krajní bod některého intervalu  $I_{i_0}, i_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$  a předpokládejme, že příslušné řešení  $\tau_1^*, \tau_2^*$  splňuje podmínku

$$0 < \tau_1^* < \tau_2^* < \tau_3^*, \quad (6.106)$$

potom pro zobrazení definované vztahem

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \triangleq (\tau_1 j + 1)^{n_1} (\tau_2 j + 1)^{n_2} - \frac{re^{j\varphi}}{(\tau_3 j + 1)^{n_3}} \quad (6.107)$$

platí

$$f(\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*) = 0.$$

Dále přímým výpočtem určíme

$$\begin{aligned} J(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\triangleq \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \operatorname{Re}f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) & \frac{\partial}{\partial \tau_2} \operatorname{Re}f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ \frac{\partial}{\partial \tau_1} \operatorname{Im}f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) & \frac{\partial}{\partial \tau_2} \operatorname{Im}f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \end{bmatrix} = \\ &= n_1 n_2 (\tau_1^2 + 1)^{n_1-1} (\tau^2 + 1)^{n_2-1} (\tau_1 - \tau_2), \end{aligned}$$

a tedy

$$J(\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*) \neq 0.$$

Podle věty 2.4.1 existuje řešení rovnice (6.103)  $\tau_1(\tau_3), \tau_2(\tau_3), \tau_3$ , kde  $\tau_1(\tau_3)$  a  $\tau_2(\tau_3)$  jsou spojité funkce definované v otevřeném okolí  $\tau_3^*$  a splňující v tomto okolí podmínku  $0 < \tau_1(\tau_3) < \tau_2(\tau_3) < \tau_3$ . To však je spor s předpokladem, že  $\tau_3$  je krajní bod intervalu  $I_{i_0}$ . Předpoklad (6.106) vede tedy ke sporu a v důsledku toho musí platit alespoň jedna z následujících podmínek:  $\tau_1^* = 0, \tau_1^* = \tau_2^*, \tau_2^* = \tau_3^*$ . Odtud již přímo plyne tvrzení (iii). ■

Podle lemmatu 6.5.7 je množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$ , sjednocením konečného počtu (souvislých) křivek jejichž krajní body jsou maximálně tři uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Nyní ukážeme, že  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je buď prázdná množina nebo jediná (souvislá) křivka, jejíž krajní body jsou dva uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Lemma 6.5.8.** *Nechť  $z = re^{j\varphi}$ , kde  $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1, m}(1, 0; 1)$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , potom pro množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$  platí :*

- (i) *Je-li  $n_3 > m$ , potom  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je prázdná množina.*
- (ii) *Je-li  $n_2 + n_3 \leq m$ , potom  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je (souvislá) křivka, jejíž krajní body jsou uzly  $(n_1 + n_2, n_3)$  a  $(n_1, n_2 + n_3)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .*
- (iii) *Je-li  $n_2 + n_3 > m$ , potom  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je (souvislá) křivka, jejíž krajní body jsou uzly  $(n_2, n_3)$  a  $(n_1 + n_2, n_3)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .*

**Důkaz:** Podle lemmatu 6.5.7 platí

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega) = \cup_{i=1}^l \mathcal{K}_i,$$

kde  $\mathcal{K}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  jsou (souvislé) křivky a množina všech krajních bodů křivek  $\mathcal{K}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  obsahuje maximálně tři následující uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ :

$$(n_2, n_3), (n_1 + n_2, n_3), (n_1, n_2 + n_3). \quad (6.108)$$

Poněvadž předpokládáme, že  $re^{j\varphi}$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1, m}(1, 0; 1)$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ , podle lemmatu 6.5.5 musí pro libovolný uzel  $(u, v)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  současně platit

$$u + v > m \quad (6.109)$$

a

$$v \leq m. \quad (6.110)$$

Jestliže je tedy  $n_3 > m$ , potom žádný z uzlů (6.108) podle (6.110) neexistuje, a v důsledku toho musí být množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  prázdná. Tím jsme dokázali tvrzení (i). Jestliže je nyní naopak  $n_3 \leq m$ , potom mohou nastat dva případy:

1. Je-li  $n_2 + n_3 \leq m$ , potom podle (6.109) a (6.110) ze seznamu (6.108) existují právě uzly  $(n_1 + n_2, n_3)$  a  $(n_1, n_2 + n_3)$ . Odtud je zřejmé, že  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je (souvislá) křivka s krajními body  $(n_1 + n_2, n_3)$  a  $(n_1, n_2 + n_3)$ .
2. Je-li  $n_2 + n_3 > m$ , potom podle (6.109) a (6.110) ze seznamu (6.108) existují právě uzly  $(n_2, n_3)$  a  $(n_1 + n_2, n_3)$ . Odtud je zřejmé, že  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  je (souvislá) křivka s krajními body  $(n_2, n_3)$  a  $(n_1 + n_2, n_3)$ .

■

Podle předchozího lemmatu je tedy množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0, \omega \neq 1$  (souvislá) křivka, jejíž konce jsou uzly množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Tato skutečnost umožňuje zavést následující definici.

**Definice 6.5.5.** Množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , definovanou vztahem (6.102) budeme nazývat  $(n_1, n_2, n_3)$ -příčkou množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Jestliže je libovolný vnitřní bod příčky  $(n_1, n_2, n_3)$  současně vnitřním bodem množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , potom budeme tuto příčku nazývat vnitřní příčkou množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . V případě, že  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega) = \emptyset$ , potom budeme říkat, že příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  neexistuje. Nechť příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  má za své krajní body uzly  $(k, l)$  a  $(k', l')$ , potom budeme říkat, že příčka je incidentní s uzly  $(k, l)$  a  $(k', l')$ .

**Lemma 6.5.9 (o vnitřních příčkách).** Nechť  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3}(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$ , kde  $r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)$ , je ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3},$$

kde  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3$  a  $n_1, n_2, n_3, \sum_{i=1}^3 n_i \leq n$  splňují alespoň jednu z následujících podmínek

- (i)  $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$
- (ii)  $n_2 \geq 2, n_3 \geq 2$
- (iii)  $n_1 \geq 2, n_1 + n_2 + n_3 < n$
- (iv)  $n_3 \geq 2, n_1 + n_2 + n_3 < n,$

potom  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0, \omega \neq 1$ . Jinými slovy : Jestliže je splněna alespoň jedna z výše uvedených podmínek (i) – (iv), potom je  $(n_1, n_2, n_3)$ -příčka vnitřní příčkou množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

**Důkaz:** Podle toho, která z podmínek (i) – (iv) je splněna, rozlišíme čtyři případy:

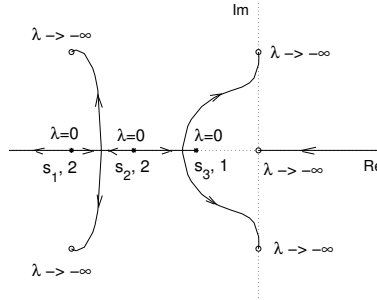
1. Nechť je splněna podmínka (i). Položme

$$p_\lambda(s) = p(s) + \lambda s(s^2 + 1)(\tau_1 s + 1)^{n_1-2}(\tau_2 s + 1)^{n_2-2}(\tau_3 s + 1)^{n_3-1}(s^2 + as + b), \quad (6.111)$$

kde  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku

$$a^2 - 4b^2 < 0. \quad (6.112)$$

Tato podmínka zaručuje, že kořeny polynomu  $s^2 + as + b$  jsou komplexní (neleží na reálné ose). Dále si všimněme, že stupeň polynomu  $p_\lambda(s)$  je maximálně roven  $n_1 + n_2 + n_3 \leq n$ . Evansovou metodou geometrického místa kořenů svazku polynomů (6.111) pro  $\lambda \in (-\infty, 0)$  snadno zjistíme (viz obr. 6.11), že pro libovolné  $a$  a  $b > 0$ , které splňují (6.112), existuje  $\lambda_0(a, b)$  takové, že pro libovolné  $\lambda \in \langle \lambda_0(a, b), 0 \rangle$  leží všechny kořeny polynomu  $p_\lambda(s)$  na reálné ose v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Navíc funkce  $\lambda_0(a, b)$  je zřejmě spojitá. Podle lemmatu 6.2.3 je tedy  $p_\lambda(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  pro všechny  $\lambda \in \langle \lambda_0(a, b), 0 \rangle$ . Nyní k dokončení důkazu užijeme lemma 6.2.4. Snadno ověříme, že jsou splněny všechny jeho předpoklady, a tedy  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0$  a  $\omega \neq 1$ .



Obrázek 6.11: Geometrické místo kořenů svazku polynomů(6.111) pro  $\lambda \in (-\infty, 0)$

Důkaz pro zbylé případy lze provést analogicky. Z tohoto důvodu budeme postupovat velmi stručně.

2. Nechť je splněna podmínka (ii). Položme

$$p_\lambda(s) = p(s) + \lambda s(s^2 + 1)(\tau_1 s + 1)^{n_1-1}(\tau_2 s + 1)^{n_2-2}(\tau_3 s + 1)^{n_3-2}(s^2 + as + b), \quad (6.113)$$

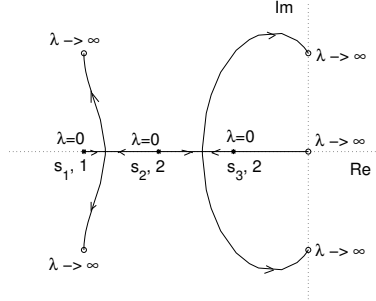
kde  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku (6.112). Geometrické místo kořenů svazku (6.113) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  je zobrazeno na obr. 6.12. Pomocí lemmatu 6.2.3 a 6.2.4 lze obdobně jako v případě 1 dokázat, že  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0, \omega \neq 1$ .

3. Nechť je splněna podmínka (iii). Položme

$$p_\lambda(s) = p(s) + \lambda s(s^2 + 1)(\tau_1 s + 1)^{n_1-2}(\tau_2 s + 1)^{n_2-1}(\tau_3 s + 1)^{n_3-1}(s^2 + as + b), \quad (6.114)$$

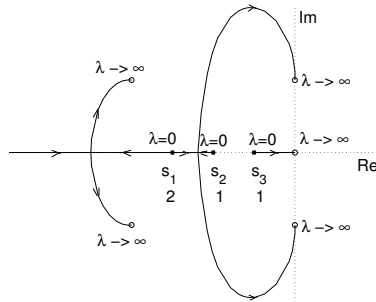
kde  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku (6.112). Geometrické místo kořenů svazku (6.114) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  je zobrazeno na obr. 6.13. Pomocí lemmatu 6.2.3 a





Obrázek 6.12: Geometrické místo kořenů svazku polynomů(6.113) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$

6.2.4 lze obdobně jako v případě 1 dokázat, že  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0, \omega \neq 1$ .



Obrázek 6.13: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.114) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$

4. Nechť je splněna podmínka (iv). Položme

$$p_\lambda(s) = p(s) + \lambda s(s^2 + 1)(\tau_1 s + 1)^{n_1-1}(\tau_2 s + 1)^{n_2-1}(\tau_3 s + 1)^{n_3-2}(s^2 + as + b), \quad (6.115)$$

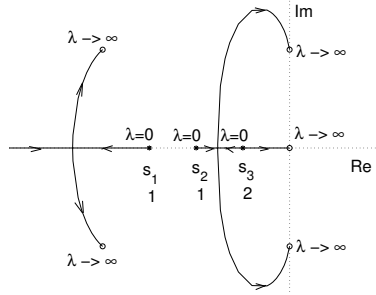
kde  $a$  a  $b > 0$  splňují podmínku (6.112). Geometrické místo kořenů svazku (6.115) pro  $\lambda \in \langle 0, +\infty \rangle$  je zobrazeno na obr. 6.14. Pomocí lematu 6.2.3 a 6.2.4 lze obdobně jako v případě 1 dokázat, že  $p(j\omega)$  je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro libovolné  $\omega > 0, \omega \neq 1$ .

■

Nyní se budeme zabývat otázkou, které příčky mají svůj krajní bod v daném uzlu.

**Lemma 6.5.10.** *Nechť  $w$  je uzel  $(k, l)$ ,  $k \geq 1$ ,  $l \geq 1$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , potom pro libovolnou příčku  $(n_1, n_2, n_3)$  s krajním bodem  $w$  platí některá z následujících podmínek:*

- (i)  $n_1 = i$ ,  $n_2 = k$ ,  $n_3 = l$ , kde  $i \in \{1, 2, \dots, n - k - l\}$
- (ii)  $n_1 = k_1$ ,  $n_2 = k_2$ ,  $n_3 = l$ , kde  $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$  a  $k_1 + k_2 = k$



Obrázek 6.14: Geometrické místo kořenů svazku polynomů (6.115) pro  $\lambda \in (0, +\infty)$

(iii)  $n_1 = k, n_2 = l_1, n_3 = l_2,$  kde  $l_1 \geq 1, l_2 \geq 1$  a  $l_1 + l_2 = k$ .

**Důkaz :** Podle lematu 6.5.8 může mít příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  za krajní body pouze následující uzly:

$$(n_2, n_3), (n_1 + n_2, n_3), (n_1, n_2 + n_3).$$

Odtud plyne, že pro uzel  $(k, l)$ , který je krajním bodem příčky  $(n_1, n_2, n_3)$ , nastane některý z následujících případů:

1.  $k = n_2, l = n_3$ . V tomto případě vyhovuje zřejmě libovolné  $n_1 \in \{1, 2, \dots, n - k - l\}$  a příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  splňuje podmínku (i).
2.  $k = n_1 + n_2, l = n_3$ . Odtud plyne, že příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  splňuje podmínku (ii).
3.  $k = n_1, l = n_2 + n_3$ . Odtud plyne, že příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  splňuje podmínku (iii).

■

**Lemma 6.5.11.** *Nechť  $w$  je vnitřní uzel  $(k, l)$ ,  $k \geq l, l \geq 1$ , množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , potom libovolná příčka s krajním bodem  $w$  je vnitřní příčka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .*

**Důkaz :** Podle definice je uzel  $(k, l)$  vnitřní uzel, jestliže  $k \geq 2, l \geq 2$  a  $k + l < n$ . Pro libovolnou příčku  $(n_1, n_2, n_3)$  s krajním bodem  $w$  podle lematu 6.5.11 platí některá z podmínek (i) – (iii) lematu 6.5.10. Podle toho, která z těchto podmínek platí, rozlišme tři případy:

1. Platí podmínka (i). Odtud plyne, že  $n_2 \geq 2$  a  $n_3 \geq 2$ , a tedy příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  je podle lematu 6.5.9 vnitřní.
2. Platí podmínka (ii). Odtud plyne, že  $n_3 \geq 2$  a  $n_1 + n_2 + n_3 = k + l < n$ , a tedy příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  je podle lematu 6.5.9 vnitřní.
3. Platí podmínka (iii). Odtud plyne, že  $n_1 \geq 2$  a  $n_1 + n_2 + n_3 = k + l < n$ , a tedy příčka  $(n_1, n_2, n_3)$  je podle lematu 6.5.9 vnitřní.

■

**Věta 6.5.1 (Hranice množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ).** Necht'  $re^{j\varphi}$ , kde  $r > 0$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , je vnitřní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{1,m}(1, 0; 1)$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n \geq 2$  a necht'  $z$  je libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ , potom platí:

(i) Jestliže  $m = 1$ , potom  $z$  leží na některé z následujících příček množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ :

$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, n-2, 1), (n-2, 1, 1). \quad (6.116)$$

Dále sjednocení příček (6.116) tvoří uzavřenou po částech hladkou křivku (křivouhelník) s  $n-1$  vrcholy:

$$(1, 1), (2, 1), \dots, (n-1, 1). \quad (6.117)$$

(ii) Jestliže  $m \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , potom  $z$  leží na některé z následujících příček množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ :

$$(1, m, 1), (1, m+1, 1), \dots, (1, n-2, 1), (n-2, 1, 1), \quad (6.118)$$

$$(n-3, 1, 2), \dots, (n-m-1, 1, m), (1, m-1, 1).$$

Dále sjednocení příček (6.118) tvoří křivouhelník s  $n$  vrcholy:

$$(m, 1), (m+1, 1), \dots, (n-1, 1), (n-2, 2), (n-3, 3), \dots, (n-m, m), (1, m). \quad (6.119)$$

(iii) Jestliže  $m = n-1$ , potom  $z$  leží na některé z následujících příček množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ :

$$(n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (1, 1, n-2), (1, n-2, 1). \quad (6.120)$$

Dále sjednocení příček (6.120) tvoří křivouhelník s  $n-1$  vrcholy:

$$(n-1, 1), (n-2, 1), \dots, (1, n-1). \quad (6.121)$$

**Důkaz:** Necht' jsou splněny předpoklady věty a necht'  $z \in \partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , potom z věty 6.3.6 plyne, že  $z$  je vnitřní bod některé příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Dále se proto budeme zabývat příčkami množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Necht'  $w$  je krajní bod některé příčky množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , potom polynom  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$ , pro který platí  $w = p(j\omega)$ , je podle lemmatu 6.2.7 ve tvaru

$$p(s) = (\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}. \quad (6.122)$$

Podle lemmatu 6.5.5 existuje právě  $m(n-m)$  různých polynomů  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1)$  ve tvaru (6.122), kde  $0 < \tau_1 < \tau_2$  a  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $n_1 + n_2 \leq n$ . Tyto polynomy jsou jednoznačně určeny seznamem (6.96) uspořádaných dvojic  $(n_1, n_2)$  exponentů  $n_1$  a  $n_2$ . Seznam (6.96) tedy zahrnuje všechny polynomy odpovídající krajním bodům všech příček množiny

$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Nyní ze seznamu (6.96) vyloučíme všechny polynomy odpovídající vnitřním uzlům množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Je-li totiž uzel  $w$  vnitřní uzel, potom podle lemmatu 6.2.5, je libovolná příčka  $\mathcal{L}$  s krajním bodem  $w$  též vnitřní příčka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  a nemusíme ji tedy dále uvažovat. Za účelem odstranění vnitřních uzlů ze seznamu (6.96) rozlišíme nyní tři případy. V každém z nich nakonec nalezneme uzavřenou křivku, tvořenou příčkami množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ , která obsahuje všechny hraniční body množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

1. Je-li  $m = 1$ , potom pomocí lemmatu 6.5.6 ze seznamu uzlů (6.96) získáme následující seznam vrcholů (viz. definice 6.5.4) množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$

$$(1, 1), (2, 1), \dots, (n-1, 1). \quad (6.123)$$

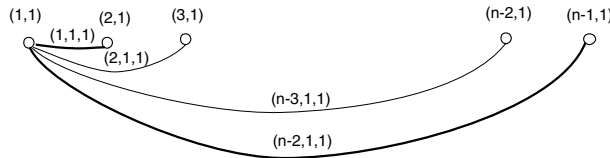
Nyní budeme hledat příčky s jedním krajním bodem  $(1, 1)$  a druhým v seznamu (6.123). Podle lemmatu 6.5.10 jsou to právě následující příčky (viz. obr.6.15) :

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), \dots, \underline{(n-3, 1, 1)}, (n-2, 1, 1). \quad (6.124)$$

Podle lemmatu 6.5.9 jsou však podtržené příčky v (6.124) vnitřní příčky, a můžeme je tedy ze seznamu hledaných příček vypustit. Takto obdržíme ze seznamu (6.124) pouze dvě příčky  $(1, 1, 1)$  a  $(n-2, 1, 1)$ . Tyto příčky jsou na obr. 6.15 vyznačeny silně. Nyní budeme postupovat analogickým způsobem pro vrchol  $(2, 1)$ . Příčky s jedním krajním bodem  $(2, 1)$  a druhým krajním bodem v seznamu (6.123) jsou uvedeny v následujícím seznamu (viz obr. 6.15) :

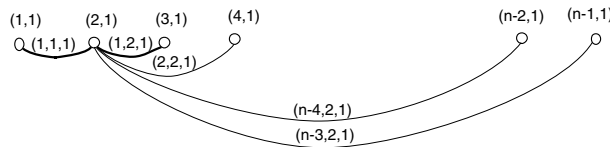
$$(1, 1, 1), (1, 2, 1), \underline{(2, 2, 1)}, \underline{(3, 2, 1)}, \dots, \underline{(n-3, 2, 1)}. \quad (6.125)$$

Podtržené příčky jsou opět podle lemmatu 6.5.9 vnitřní příčky a můžeme je tedy ze seznamu hledaných příček vypustit.



Obrázek 6.15: Příčky incidentní s uzlem  $(1, 1)$

Ze seznamu (6.125) takto obdržíme pouze jednu novou příčku  $(1, 2, 1)$ , která je na obr. 6.16 vyznačena silně.

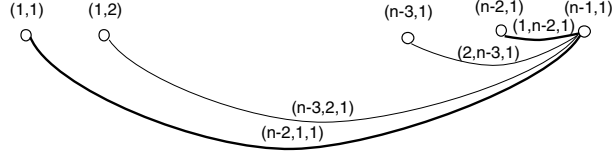


Obrázek 6.16: Příčky incidentní s uzlem  $(2, 1)$

Stejným způsobem můžeme pokračovat pro uzel  $(i, 1)$ ,  $i = 3, 4, \dots, n-2$ . Vždy obdržíme pouze jednu novou příčku a to příčku  $(1, i, 1)$  (viz obr. 6.16). Konečně

pro uzel  $(n-1, 1)$  obdržíme následující seznam s ním incidenčních příček (viz obr. 6.17):

$$(n-2, 1, 1), \underline{(n-3, 2, 1)}, \dots, \underline{(2, n-3, 1)}, (1, n-2, 1). \quad (6.126)$$



Obrázek 6.17: Příčky incidenční s uzlem  $(n-1, 1)$

Podtržené příčky jsou opět podle lemmatu 6.2.3 vnitřní příčky a můžeme je tedy ze seznamu hledaných příček vypustit. Shrňeme-li dosažené výsledky, obdržíme následující tvrzení : Je-li  $m = 1$ , potom libovolný krajní bod

množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce ze seznamu (6.116) a všechny vrcholy množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  jsou dány seznamem (6.117). Tím jsme dokázali tvrzení (i).

2. Je-li  $m \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , potom pomocí lemmatu 6.5.6 ze seznamu uzlů (6.96) získáme následující seznam vrcholů množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  :

$$(m, 1), (m+1, 1), \dots, (n-1, 1), (n-2, 2), (n-3, 3), \dots, (n-m, m), (1, m). \quad (6.127)$$

Seznam (6.127) rozdělme na tři části

$$(m, 1), (m+1, 1) \quad , \dots, (n-1, 1) \quad (6.128)$$

$$(n-1, 1), (n-2, 2) \quad , \dots, (n-m, m) \quad (6.129)$$

$$(1, m). \quad (6.130)$$

Zřejmě libovolný uzel ze seznamu (6.127) je obsažen v některém seznamu (6.128)–(6.130) a to s výjimkou uzlu  $(n-1, 1)$  právě jednou. Uzel  $(n-1, 1)$  je obsažen ve dvou seznamech (6.128) a (6.129).

Nyní uvažujeme seznam (6.128). Nechť  $(k, 1)$  a  $(l, 1)$  jsou dva libovolné různé uzly z (6.128) a nechť  $k \geq l$ , potom podle lemmatu 6.5.10 je příčka  $(k-l, l, 1)$  incidenční s těmito uzly a pro  $k-l \geq 2$  je navíc podle lemmatu 6.5.9 vnitřní, neboť podle předpokladu platí  $l \geq 2$ . Krajní bod z množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  ležící na některé příčce, jejíž oba krajní body jsou obsaženy v seznamu (6.128), musí tedy ležet na některé z následujících příček

$$(1, m, 1), (1, m+1, 1), \dots, (1, n-2, 1). \quad (6.131)$$

Nechť  $(k, l)$  a  $(k', l')$ ,  $k > k'$  jsou libovolné různé uzly ze seznamu (6.129), potom podle lemmatu 6.5.10 je příčka  $(k_1, k_2, l)$ , kde  $k_1 = k'$ ,  $k_2 = k - k'$ , incidenční s těmito uzly. Je-li nyní  $k - k' \geq 2$ , potom  $k_1 \geq n - m \geq 2$  a  $k_2 \geq 2$  a příčka  $(k_1, k_2, l)$  je vnitřní. Dokázali jsme tedy, že libovolný krajní bod  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  ležící na některé příčce jejíž krajní body jsou incidenční s uzly v seznamu (6.129), musí ležet na některé z následujících příček

$$(n-2, 1, 1), (n-3, 1, 2), \dots, (n-m, 1, m-1). \quad (6.132)$$

Nyní dokážeme, že je-li  $(k, l)$  libovolný uzel seznamu (6.128) různý od uzlu  $(n-1, 1)$  a je-li  $(k', l')$  libovolný uzel seznamu (6.129) různý od uzlu  $(n-1, 1)$ , potom neexistuje žádná příčka množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  mající uzly  $(k, l)$  a  $(k', l')$  za své krajní body. Předpokládejme opak. Nechť  $(n_1, n_2, n_3)$  je taková příčka. Poněvadž  $k+l < n$  a  $n'+l' = n$  musí být podle lemmatu 6.5.10  $n_3 = l = l'$ . To však není možné, neboť  $l = 1$  a  $l' \geq 2$ .

Nyní uvažujme uzel  $(1, m)$  patřící do seznamu (6.130). Nechť  $(k', l')$  je nejprve uzel ze seznamu (6.128) různý od  $(m, 1)$ , potom zřejmě platí  $k'+l' > m+1$ , a tedy podle lemmatu 6.5.10 sousedí uzel  $(1, m)$  s uzlem  $(k', l')$  pouze tehdy, je-li  $l' = m$ . To však není možné, neboť  $l' = 1$  a  $m \geq 2$  podle předpokladu. Tedy mezi uzlem  $(1, m)$  a uzly ze seznamu (6.128) existuje podle lemmatu 6.5.10 jediná příčka

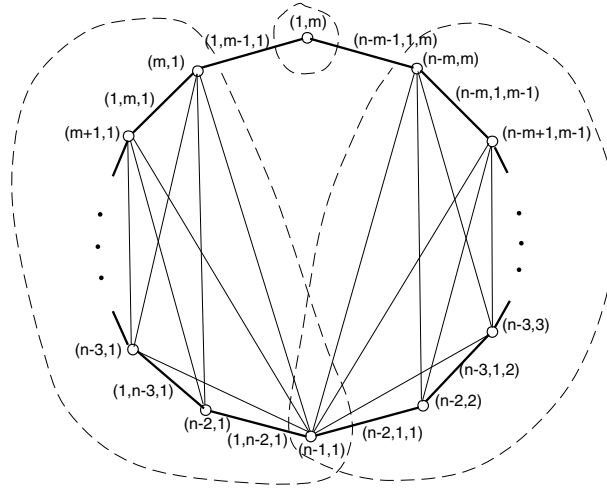
$$(1, m-1, 1) \quad (6.133)$$

spojující uzly  $(1, m)$  a  $(m, 1)$ . Nechť  $(k', l')$  je nyní uzel ze seznamu (6.129) různý od uzlu  $(n-m, m)$ , potom opět platí  $k'+l' = n > m+1$  a tedy podle lemmatu 6.5.10 sousedí uzel  $(1, m)$  s uzlem  $(k', l')$  pouze tehdy, je-li  $l' = m$ . To však není možné, neboť  $l' \leq m-1$ . Tedy mezi uzlem  $(1, m)$  a uzly ze seznamu (6.129) existuje podle lemmatu 6.5.10 jediná příčka

$$(n-m-1, 1, m) \quad (6.134)$$

spojující uzly  $(1, m)$  a  $(n-m, m)$ .

Shrnutím dosažených výsledků obdržíme: Libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží některé příčce ze seznamů (6.131), (6.132), (6.133) a (6.134). Nyní lze pomocí lemmat 6.2.2 a 6.2.4 snadno dokázat, že sjednocení těchto příček tvoří uzavřenou po částech hladkou křivku s  $n$  vrcholy (6.119). Viz obr. 6.18.



Obrázek 6.18: Příčky incidentní s vrcholy (6.127) (tence), příčky patřící do seznamu (6.131), (6.132), (6.133) a (6.134) (silně) a vrcholy ze seznamů (6.128)–(6.130) (ohraňované čárkovaně)

3. Je-li  $m = n-1$ , potom pomocí lemmatu 6.5.6 ze seznamu uzlů (6.96)

získáme následující seznam vrcholů množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$ :

$$(m, 1), (m-1, 2), \dots, (1, m). \quad (6.135)$$

Nyní budeme hledat příčky s jedním krajním bodem  $(m, 1)$  a druhým ze seznamu (6.135). Podle lemmatu 6.5.10 je uzel  $(m, 1)$  sousední se všemi uzly (6.135) a hledané příčky jsou tedy právě ty, které jsou uvedené v následujícím seznamu (viz obr. 6.19):

$$(m-1, 1, 1), \underline{(m-2, 2, 1)}, \dots, \underline{(2, m-2, 1)}, (1, m-1, 1). \quad (6.136)$$

Podle lemmatu 6.5.9 jsou však podtržené příčky v (6.136) vnitřní příčky a můžeme je tedy z dalších úvah vypustit. Obdržíme tedy následující seznam příček incidenčních s uzlem  $(m, 1)$ :

$$(m-1, 1, 1), (1, m-1, 1). \quad (6.137)$$

Stejným způsobem budeme nyní postupně pokračovat pro uzel  $(m-i, i+1)$ ,  $i = \{1, 2, \dots, m-2\}$ . Seznam příček spojujících uzel  $(m-i, i+1)$  se všemi dalšími uzly seznamu (6.135) je podle lemmatu 6.5.10 následující:

$$\begin{aligned} & \frac{(m-i, i, 1)}{(m-i, 2, i-1)}, \quad \frac{(m-i, i-1, 2)}{(m-i, 1, i)}, \quad \dots, \\ & \underline{(m-i-1, 1, i+1)}, \quad \underline{(m-i-2, 2, i+1)}, \quad \dots, \\ & \underline{(2, m-i-2, i+1)}, \quad \underline{(1, m-i-1, i+1)}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Podle lemmatu 6.5.9 jsou však podtržené příčky v seznamu (6.138) vnitřní příčky a můžeme je tedy z dalších úvah vypustit. Obdržíme tedy následující seznam příček incidenčních s uzlem  $(m-i, i+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-2$ :

$$\begin{aligned} i=1: & \quad (m-1, 1, 1), \quad (m-2, 1, 2) \\ i=2: & \quad (m-2, 1, 2), \quad (m-3, 1, 3) \\ & \quad \vdots \\ i=m-2: & \quad (2, 1, m-2), \quad (1, 1, m-1). \end{aligned}$$

Celkově tedy získáme následující seznam příček (viz obr. 6.20):

$$(m-1, 1, 1), (m-2, 1, 2), (m-3, 1, 3), \dots, (2, 1, m-2), (1, 1, m-1). \quad (6.139)$$

Zbývají příčky procházející uzlem  $(1, m)$ . Podle lemmatu 6.5.10 jsou to tyto příčky (viz obr. 6.21):

$$(1, m-1, 1), \underline{(1, m-2, 2)}, \dots, \underline{(1, 2, m-2)}, (1, 1, m-1). \quad (6.140)$$

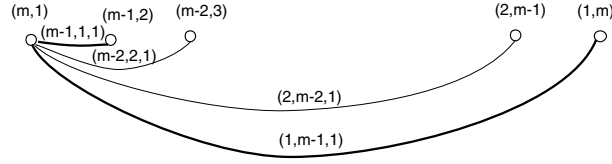
Podle lemmatu 6.5.9 jsou však podtržené příčky v seznamu (6.140) vnitřní příčky a můžeme je tedy z dalších úvah vypustit. Obdržíme tedy následující seznam příček incidenčních s bodem  $(1, m)$ :

$$(1, m-1, 1), (1, 1, m-1). \quad (6.141)$$

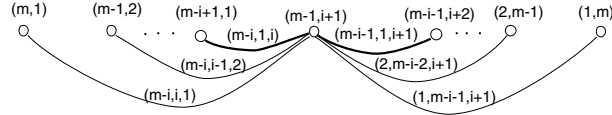
Dokázali jsme tedy následující tvrzení: Je-li  $m = n-1$ , potom libovolný krajní bod množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^n(1, 0; re^{j\varphi}, 1; \omega)$  leží na některé příčce patřící do seznamů (6.137), (6.139) a (6.141). Snadno ověříme, že sjednocení těchto seznamů

dává právě seznam (6.120). Nyní lze pomocí lemmat 6.5.8 a 6.5.10 snadno dokázat, že sjednocení příček v seznamu (6.120) tvoří uzavřenou po částech hladkou křivku s  $n - 1$  vrcholy (6.121).

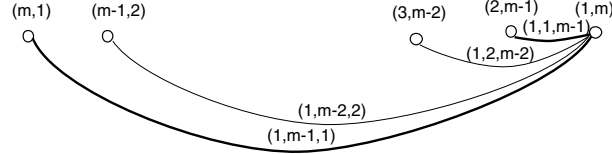
Tím je důkaz dokončen. ■



Obrázek 6.19: Příčky incidentní s uzlem  $(m, 1)$



Obrázek 6.20: Příčky incidentní s uzlem  $(m - i, i + 1)$



Obrázek 6.21: Příčky incidentní s uzlem  $(1, m)$

## 6.6 Dvoubodová interpolace: případ $\omega_1 > 0$

V tomto oddíle uvedeme dvě pomocná tvrzení, která hrají hlavní roli při popisu všech extrémálních polynomů množiny  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^n(P_1, \omega_1; P_2, \omega_2; \omega)$ , pro  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2\}$ .

Nechť  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $n_i \geq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $m \geq 0$ . Označme

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1) \triangleq \left\{ p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1) : \right. \\ \left. p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1}(\tau_2 s + 1)^{n_2}(\tau_3 s + 1)^{n_3} s^m, \right. \\ \left. k = n_1 + n_2 + n_3 + m, k_0 > 0, \right. \\ \left. 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega) \triangleq \{p(j\omega) : p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1)\}.$$



**Lemma 6.6.1.** Polynom  $p(s)$  je prvkem množiny  $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$  právě tehdy, jestliže lze vyjádřit ve tvaru

$$p(s) = p(s, \alpha_1, \alpha_2) \triangleq k_0(\alpha_1, \alpha_2) [\tau_1(\alpha_1)s + 1]^{n_1} [\tau_2(\alpha_2)s + 1]^{n_2} [\tau_3(\alpha_1, \alpha_2)s + 1]^{n_3} s^m, \quad (6.142)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau_1(\alpha_1) &= \tan \alpha_1 \\ \tau_2(\alpha_2) &= \tan \alpha_2 \\ \tau_3(\alpha_1, \alpha_2) &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3} \\ k_0(\alpha_1, \alpha_2) &= [\tau_1^2(\alpha_1) + 1]^{-\frac{n_1}{2}} [\tau_2^2(\alpha_2) + 1]^{-\frac{n_2}{2}} [\tau_3^2(\alpha_1, \alpha_2) + 1]^{-\frac{n_3}{2}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\in \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\pi}{2} \right) \\ \alpha_2 &\in \left\langle \alpha_1, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2}, \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

**Důkaz :** Nechť  $p(s) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1)$ , potom je  $p(s)$  ve tvaru

$$p(s) = k_0(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} (\tau_3 s + 1)^{n_3} s^m,$$

kde  $k_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$  a platí

$$p(j) = k_0(\tau_1 j + 1)^{n_1} (\tau_2 j + 1)^{n_2} (\tau_3 j + 1)^{n_3} j^m = e^{j\varphi}. \quad (6.143)$$

Z rovnice (6.143) obdržíme úhlovou podmínku ve tvaru

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + m\frac{\pi}{2} = \varphi, \quad (6.144)$$

kde

$$\alpha_i = \arctan \tau_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.145)$$

Podmínka  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3$  je zřejmě ekvivalentní s podmínkou

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3, \quad (6.146)$$

a tudíž z (6.144) plyne

$$\alpha_1 \leq \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3}. \quad (6.147)$$

Z (6.144) dále plyne

$$\alpha_3 = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3}, \quad (6.148)$$

a poněvadž požadujeme  $\alpha_2 \leq \alpha_3$  musí být

$$\alpha_2 \leq \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3},$$

neboli

$$\alpha_2 \leq \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3}. \quad (6.149)$$

Navíc z podmínky (6.144) pro  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  a  $\alpha_3 < \frac{\pi}{2}$  obdržíme

$$\alpha_1 > \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1} \quad (6.150)$$

a podobně z podmínky (6.144) a  $\alpha_3 < \frac{\pi}{2}$  obdržíme

$$\alpha_2 > \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2}. \quad (6.151)$$

Spojením podmínek (6.145), (6.147) a (6.150) pro  $\alpha_1$  již dostaneme

$$\alpha_1 \in \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Podobně z (6.145), (6.146), (6.149) a (6.151) obdržíme

$$\alpha_2 \in \left\langle \alpha_1, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Konečně z (6.145) plyne

$$\begin{aligned} \tau_1(\alpha_1) &= \tan \alpha_1 \\ \tau_2(\alpha_2) &= \tan \alpha_2 \\ \tau_3(\alpha_1, \alpha_2) &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3}. \end{aligned}$$

Vztah pro  $k_0$

$$k_0 = (\tau_1^2 + 1)^{-\frac{n_1}{2}} (\tau_2^2 + 1)^{-\frac{n_2}{2}} (\tau_3^2 + 1)^{-\frac{n_3}{2}}$$

získáme přímo z amplitudové podmínky rovnice (6.143). Obrácením uvedeného postupu lze důkaz lemmatu dokončit. ■

**Lemma 6.6.2.** *Množina  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \notin \{0, 1\}$ , je část komplexní roviny ohraničená třemi nebo čtyřmi příčkami množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $k = n_1 + n_2 + n_3 + m$ . Pro konstruktivní popis množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je nutné rozlišit následující případy:*

(i) *Je-li  $\varphi < (n_3 + m)\frac{\pi}{2}$ , potom množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  ohraničují příčky:*

$$(n_2, n_3, m), (n_1, n_2 + n_3, m) \text{ a } (n_1 + n_2, n_3, m).$$

*Všechny tyto příčky navíc patří do  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Jinými slovy:  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je křivouhelník se třemi vrcholy*

$$(n_1, m), (n_2 + n_3, m) \text{ a } (n_1 + n_2 + n_3, m).$$

(ii) *Je-li  $\varphi \in \left( (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right)$ , potom množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  ohraničují příčky:*

$$(n_2, n_3, m), (n_1, n_2 + n_3, m), (n_1 + n_2, n_3, m) \text{ a } (n_1, n_2, m + n_3).$$

Všechny krajní body  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  s výjimkou bodů ležících na přímce  $(n_1, n_2, m + n_3)$  patří do  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Jinými slovy:  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je křivouhelník se čtyřmi vrcholy

$$(n_2, m + n_3), (n_2 + n_3, m), (n_1 + n_2 + n_3, m) \text{ a } (n_1 + n_2, m + n_3)$$

bez strany  $(n_1, n_2, m + n_3)$ .

(iii) Je-li  $\varphi \in \langle (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \rangle$ , potom množinu  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  ohraničují přímky:

$$(n_1, n_2 + n_3, m), (n_1 + n_2, n_3, m) \text{ a } (n_1, n_2, m + n_3).$$

Všechny krajní body  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  s výjimkou bodů ležících na přímce  $(n_1, n_2, m + n_3)$  patří do  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Jinými slovy:  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  je křivouhelník se třemi vrcholy

$$(n_1, m + n_2 + n_3), (n_1 + n_2 + n_3, m) \text{ a } (n_1, n_2, m + n_3)$$

bez strany  $(n_1, n_2, m + n_3)$ .

**Důkaz:** Necht  $p(s) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1)$ , potom podle lemmatu 6.6.1 lze polynom  $p(s)$  vyjádřit ve tvaru (6.142). Je-li navíc

$$0 < \tau_1(\alpha_1) < \tau_2(\alpha_2) < \tau_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

potom podle lemmatu 6.2.7 je bod  $p(j\omega)$  vnitřní bod  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ . Pro hraniční bod  $z = p(j\omega, \alpha_1, \alpha_2) \in \partial\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  musí tedy platit alespoň jedna z následujících podmínek :

$$\tau_1(\alpha_1) = 0 \tag{6.152}$$

$$\tau_1(\alpha_1) = \tau_2(\alpha_2) \tag{6.153}$$

$$\tau_2(\alpha_1) = \tau_3(\alpha_1, \alpha_2) \tag{6.154}$$

$$\tau_3(\alpha_1, \alpha_2) = +\infty. \tag{6.155}$$

1. Je-li splněna podmínka (6.152), musí podle (6.142) platit

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tan \alpha_1 = 0, & \alpha_1 &= 0 \\ \tau_2 &= \tan \alpha_2 \\ \tau_3 &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_2\alpha_2}{n_3}, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_2 \in \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_2}, \frac{\pi}{2} \right) \triangleq I_{\alpha_2}. \tag{6.156}$$

Z definice (6.156) intervalu  $I_{\alpha_2}$  plyne

$$I_{\alpha_2} = \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_2 + n_3} \right\rangle, \quad \text{pro } \varphi \in \left( 0, (n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right) \tag{6.157}$$

$$I_{\alpha_2} = \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_2}, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_2 + n_3} \right), \tag{6.158}$$

$$\text{pro } \varphi \in \left\langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$I_{\alpha_2} = \emptyset, \quad \text{pro } \varphi \geq (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}. \tag{6.159}$$

Podle definice 6.4.1 leží tedy bod  $z$  na přímce  $(n_1, n_2, m)$ , množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $k = n_1 + n_2 + n_3 + m$ , která má v závislosti na  $\varphi$  podle (6.29) a (6.30) tyto krajní body:

$$\begin{aligned} & (n_3, m), (n_2 + n_3, m) && \text{pro } \varphi \in (0, (n_3 + m)\frac{\pi}{2}) \\ & (n_2, m + n_3), (n_2 + n_3, m) && \text{pro } \varphi \in \langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Poznamenejme ještě, že je-li  $\varphi \geq (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}$ , potom (6.152) nemůže být vzhledem k (6.159) splněna a tedy přímka  $(n_1, n_2, m)$  nepatří do  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ .

2. Je-li splněna podmínka (6.153), musí podle (6.142) platit

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 = \tan \alpha_1 \\ \tau_3 &= \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - (n_1 + n_2)\alpha_1}{n_3}, \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_1 \in \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\pi}{2} \right) \triangleq I_{\alpha_1} \quad (6.160)$$

$$\alpha_1 \in \left\langle \alpha_1, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2}, \frac{\pi}{2} \right) \triangleq I_{\alpha_2}. \quad (6.161)$$

Je-li nyní  $\alpha_1 \in I_{\alpha_1}$ , potom  $\alpha_1 \in I_{\alpha_2}$  právě tehdy, jestliže současně platí

$$\frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3} \geq \alpha_1$$

a

$$\frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2} < \alpha_1$$

neboli

$$\alpha_1 \leq \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \quad (6.162)$$

a

$$\alpha_1 > \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2}. \quad (6.163)$$

Z (6.160), (6.162) a (6.163) plyne, že pro interval  $I_{\alpha_1\alpha_2}$  všech  $\alpha_1$  splňujících (6.160) a (6.161) platí

$$I_{\alpha_1\alpha_2} = \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle, \quad \text{pro } \varphi \in \left(0, (n_3 + m)\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.164)$$

$$I_{\alpha_1\alpha_2} = \left( \frac{\varphi - (n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2}, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right), \quad (6.165)$$

$$\text{pro } \varphi \in \left\langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$I_{\alpha_1\alpha_2} = \emptyset, \quad \text{pro } \varphi \geq (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}.$$

Podle definice 6.4.1 leží tedy bod  $z$  na přímce  $(n_1, n_2, n_3, m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $k = n_1 + n_2 + n_3 + m$ , která má v závislosti na  $\varphi$  podle (6.29) a (6.30) tyto krajní body :

$$\begin{aligned} & (n_3, m), (n_1 + n_2 + n_3, m), && \text{pro } \varphi \in (0, (n_3 + m)\frac{\pi}{2}) \\ & (n_1 + n_2, m + n_3), (n_1 + n_2 + n_3, m), && \\ & \text{pro } \varphi \in \langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \rangle. && \end{aligned}$$

Pro  $\varphi \geq (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}$  nemůže být podmínka (6.153) splněna.

3. Je-li splněna podmínka (6.154), musí podle (6.142) platit

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3},$$

neboli

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tan \alpha_1 \\ \tau_2 &= \tau_3 = \tan \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2 + n_3},\end{aligned}$$

kde

$$\alpha_1 \in \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\pi}{2} \right) \triangleq I_{\alpha_1}. \quad (6.166)$$

Z definice (6.166) intervalu  $I_{\alpha_1}$  plyne

$$\begin{aligned}I_{\alpha_1} &= \left\langle 0, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right\rangle, \quad \text{pro } \varphi \in \left( 0, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right) \\ I_{\alpha_1} &= \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi - m\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2 + n_3} \right), \\ &\quad \text{pro } \varphi \in \left( (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right) \\ I_{\alpha_1} &= \emptyset, \quad \text{pro } \varphi \geq (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Podle definice 6.4.1 leží tedy bod  $z$  na příčce  $(n_1, n_2 + n_3, m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $k = n_1 + n_2 + n_3 + m$ , která má v závislosti na  $\varphi$  podle (6.29) a (6.30) tyto krajní body :

$$\begin{aligned}&(n_2 + n_3, m), (n_1 + n_2 + n_3, m), \quad \text{pro } \varphi \in \left( 0, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right) \\ &(n_1, n_2 + n_3 + m), (n_1 + n_2 + n_3, m), \\ &\quad \text{pro } \varphi \in \left( (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Pro  $\varphi \geq (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}$  nemůže být podmínka (6.154) splněna.

4. Je-li splněna podmínka (6.155), musí podle (6.142) platit

$$\frac{\varphi - m\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{n_3} = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2}. \quad (6.167)$$

Poněvadž  $\alpha_2 \geq \alpha_1$ , pomocí (6.167) obdržíme

$$\alpha_1 \leq \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tan \alpha_1 \\ \tau_2 &= \tan \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2} - n_1\alpha_1}{n_2},\end{aligned}$$

kde

$$\alpha_1 \in \left\langle 0, \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2} \right\rangle \cap \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\pi}{2} \right) \triangleq I_{\alpha_1}. \quad (6.168)$$

Z definice (6.168) intervalu  $I_{\alpha_1}$  plyne

$$\begin{aligned}I_{\alpha_1} &= 0, \quad \text{pro } \varphi \in \left(0, (n_3 + m)\frac{\pi}{2}\right) \\ I_{\alpha_1} &= \left\langle 0, \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2} \right\rangle, \quad \text{pro } \varphi \in \left\langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right\rangle \\ I_{\alpha_1} &= \left( \frac{\varphi - (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}}{n_1}, \frac{\varphi - (m + n_3)\frac{\pi}{2}}{n_1 + n_2} \right), \\ &\quad \text{pro } \varphi \in \left( n_1 + n_2 + n_3 + m \right)\frac{\pi}{2} \\ I_{\alpha_1} &= \emptyset, \quad \text{pro } \varphi \geq \left( n_1 + n_2 + n_3 + m \right)\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Podle definice 6.4.1 leží tedy bod  $z$  na přímce  $(n_1, n_2, n_3 + m)$  množiny  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^k(e^{j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $k = n_1 + n_2 + n_3 + m$ , která má v závislosti na  $\varphi$  podle (6.29) a (6.30) tyto krajní body :

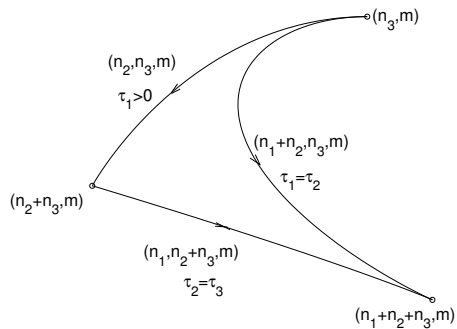
$$\begin{aligned}&(n_2, m + n_3), (n_1 + n_2, n_3 + m), \quad \text{pro } \varphi \in \left\langle (n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right\rangle \\ &(n_1, n_2 + n_3 + m), (n_1 + n_2, n_3 + m), \\ &\quad \text{pro } \varphi \in \left\langle (n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}, (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$

Pro  $\varphi < (n_3 + m)\frac{\pi}{2}$  nebo  $\varphi \geq (n_1 + n_2 + n_3 + m)\frac{\pi}{2}$  nemůže být podmínka (6.156) splněna.

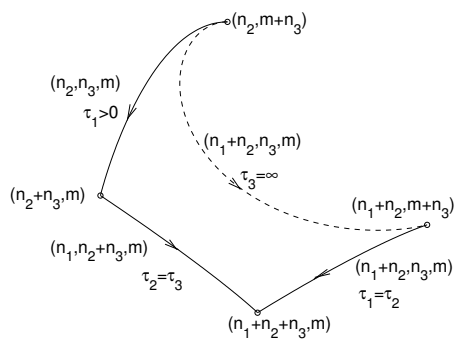
Shrnutím dosažených výsledků v krocích 1 až 4 obdržíme již dokazované tvrzení. Skutečnost, že libovolný vnitřní bod příslušného křivoúhelníku patří do  $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^-}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  vyplývá ze spojitosti zobrazení (6.142).

■

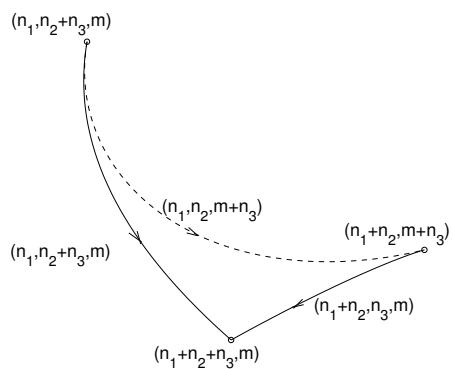
Pro lepší názornost tvrzení lemmatu 6.6.2 jsou na obr.6.22 znázorněny příslušné křivoúhelníky pro případy (i) – (iii).



(a) (i)



(b) (ii)



(c) (iii)

Obrázek 6.22: Křivouhelník  $\mathcal{V}_{\mathbf{R}}^{n_1, n_2, n_3, m}(e^{j\varphi}, 1; \omega)$  pro případy (i – iii) lematu 6.6.2.

## Kapitola 7

# Revize Zieglerovy–Nicholsovy frekvenční metody

*V této kapitole použijeme výsledků dosažených v předcházejících kapitolách k důkladné revizi ZNF metody. Nejprve podrobně objasníme důvody, proč je ZNF metoda nespolehlivá (stejně jako všechny její modifikace využívající znalosti pouze jediného bodu frekvenční charakteristiky s fázovým zpožděním  $180^\circ$ ). Dále odpovíme kladně na otázku, zda lze za jistých apriorních předpokladů navrhnout vyhovující regulátor (PI, PID) pouze na základě znalosti jediného chytře vybraného bodu frekvenční charakteristiky procesu. Řešením úloh RNR pro množinový model  $S_{\mathbb{R}}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ , kde  $n$  je dostatečně velké a  $\varphi$  probíhá interval  $(0^\circ, 180^\circ)$ , zjistíme fázové zpoždění nejvýhodnějšího bodu pro návrh regulátoru daného typu. Takto obdržíme spolehlivou a v jistém smyslu nejlepší možnou metodu návrhu PI a PID regulátorů vycházející pouze ze znalosti jediného bodu frekvenční charakteristiky.*

### 7.1 Úvod

V roce 1942 Ziegler a Nichols ve svém slavném článku [1] publikovali dvě inženýrské metody pro nastavování P, PI a PID regulátorů. Stojí za povšimnutí, že Ziegler a Nichols tehdy pracovali ve firmě Taylor Instrument Companies, která vyráběla regulátory. Prvý z nich byl zaměstnán v obchodním oddělení a druhý ve výzkumu. Jejich článek není v žádném případě produktem akademického výzkumu, ale spíše se podobá podrobnějšímu návodu na použití regulátoru. Obě popsané metody vychází z empirických údajů získaných experimentálním seřizováním mnoho reálných regulačních smyček. Zieglerova–Nicholsova (ZN) frekvenční metoda počítá parametry regulátoru z tzv. kritického bodu frekvenční charakteristiky, zatímco časová metoda z počátku přechodové charakteristiky procesu. ZN metody jsou kupodivu v současné době v průmyslu a dokonce i v akademickém výzkumu stále velmi populární a jsou základem převážné většiny PID autotunerů [29], [37] implementovaných v moderních průmyslových regulátorech a distribuovaných systémech řízení. Pozoruhodné je, že Ziegler a



Nichols prezentovali své metody bez jakéhokoliv teoretického objasnění. Sami v článku uvádějí, že se pokusí pouze odpovědět na praktickou otázku jak rychle a vhodně seřadit regulátor pro libovolnou regulační aplikaci a že se nebudou snažit žádným způsobem své metody odůvodnit. To podle jejich slov ponechají na pozdější dobu, až matematické odvození dozraje do konečné podoby. Zdá se, že se tak ještě nestalo. Existuje sice obrovské množství prací věnujících se zhodnocení nebo modifikaci ZN metod, všechny však mají podobně jako původní článek [1] empirický charakter. Jako příklad z poslední doby uveďme práce [42], [43]. Jediný rozdíl spočívá v tom, že se experimentuje s vybranými matematickými modely místo s reálnými systémy.

Hlavním výsledkem této kapitoly je přesná formulace úlohy návrhu regulátoru na základě jednoho nebo dvou bodů frekvenční charakteristiky (v podobě úlohy RNR) a její následné numerické řešení pomocí nově vytvořené techniky reprezentativní podmnožiny. Výsledkem jsou teoreticky podložené (za daných předpokladů nikdy neselhávající) modifikace ZNF metody vhodné pro automatické nastavování průmyslových regulátorů. Prozradíme dopředu, že hlavní myšlenka modifikace spočívá v chytrém výběru jednoho bodu frekvenční charakteristiky pro daný typ regulátoru a pro požadovanou hodnotu M-indexu uzavřené smyčky.

## 7.2 Zieglerova–Nicholsova frekvenční metoda

Princip ZNF metody je následující: v uzavřené smyčce s proporcionálním regulátorem postupně pomalu zvětšujeme zesílení  $K$  regulátoru až do okamžiku vzniku netlumených kmitů. Z naměřeného záznamu regulované veličiny určíme periodu vzniklých kmitů  $T_{180}$  a příslušné zesílení regulátoru  $K = K_c$  (toto zesílení nazýváme kritické). Parametry regulátorů P, PI a PID s obecným přenosem

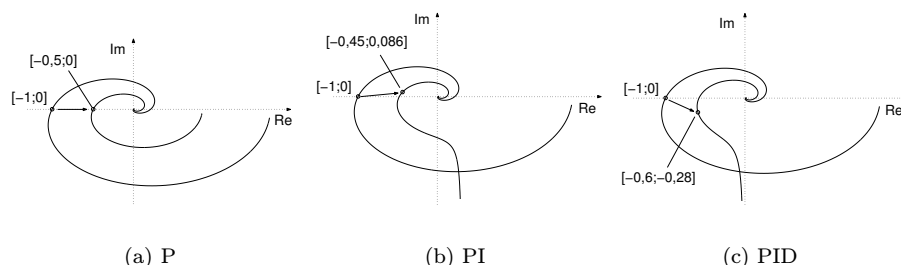
$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

určíme z tabulky 7.1.

	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_c$		
PI	$0,45K_c$	$T_{180}/1,2$	
PID	$0,6K_c$	$T_{180}/2$	$T_{180}/8$

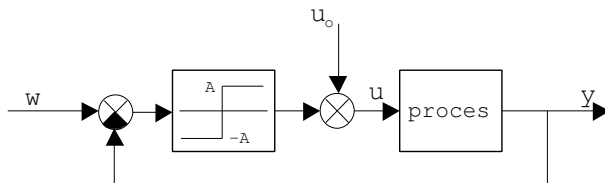
Tabulka 7.1: Parametry regulátorů P, PI a PID podle ZN frekvenční metody.

Heuristickým způsobem lze ZNF metodu odůvodnit pomocí obr. 7.1. Na něm je znázorněn způsob, jakým je kritický bod kompenzován po řadě regulátory P, PI a PID navrženými podle tab. 7.1. Všimněte si, že například PID regulátor přesouvá bod z  $M$  kružnice pro  $M = +\infty$  na bod ležící na  $M$ -kružnici pro  $M = 1,36$ . Heuristické odůvodnění ZNF metody spočívá ve víře, že jestliže zkompenzujeme frekvenční charakteristiku procesu vhodně na frekvenci  $\omega_{180} = \frac{2\pi}{T_{180}}$  (pomocí regulátoru P, PI a PID), potom žádný bod kompenzované frekvenční charakteristiky nebude příliš blízko kritického bodu  $[-1, j0]$ . Tato doměnka je však, jak dále uvidíme, chybná.



Obrázek 7.1: Kompenzace kritického bodu regulátorem P, PI, PID nastaveným ZN frekvenční metodou

Provedení experimentu v podobě, jak ho popisuje ZNF metoda, je velmi problematické, neboť vyžaduje provozování regulační smyčky na mezi stability bez možnosti ovlivňovat amplitudu kmitů. Naštěstí lze tento nedostatek odstranit nahrazením „experimentujícího“ P regulátoru reléovým regulátorem podle obr. 7.2. V tomto případě je možné velikost kmitů spolehlivě ovlivňovat volbou amplitudy relé  $A$ . Perioda vzniklých kmitů v ustálené stavu je opět přibližně  $T_{180}$  a kritické zesílení  $K_c$  lze určit z přibližného vztahu



Obrázek 7.2: Identifikace kritického bodu frekvenční charakteristiky pomocí reléového regulátoru

$$K_c \cong \frac{4A}{\pi B}, \quad (7.1)$$

kde  $B$  je amplituda kmitů regulované veličiny  $y$  v ustáleném stavu. Poznamenejme, že vztah (7.1) vyplývá z rozkladu obdélníkového signálu do Fourierovy řady.

$$u(t) - u_0 = \frac{4A}{\pi} \left( \sin \omega_{180} t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_{180} t + \dots \right)$$

a z předpokladu, že řízený systém dostatečně potlačí všechny vyšší harmonické obsažené v obdélníkovém signálu  $u(t)$ . Právě popsaná modifikace ZN frekvenční metody je základem reléových autotunerů, které jsou implementovány v moderních průmyslových regulátorech mnoha světových výrobců. Kvalita zmíněných autotunerů však kriticky závisí na kvalitě ZNF metody a ta je, jak dále uvidíme, nevyhovující. Poznamenejme, že užití reléového regulátoru pro identifikaci jednoho bodu frekvenční charakteristiky poprvé navrhl Rotač [6]. Později Aström a Hagglund [12], [4] tento princip znovu objevili.

## 7.3 Vlastnosti ZNF metody

V tomto oddíle budeme aplikovat ZNF metodu na množinu přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\pi}, 1)$ . Připomeňme, že do této množiny patří všechny přenosy ve tvaru

$$F(s) = \frac{K_0}{p(s)}$$

splňující interpolační podmínku

$$F(j) = \frac{K_0}{p(j)} = e^{-j\pi} = -1,$$

kde  $K_0$  a  $p(s)$  je polynom s reálnými nezápornými koeficienty stupně maximálně  $n$ , jehož všechny kořeny navíc leží v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Všimněme si, že všechny přenosy  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$  mají stejné kritické zesílení  $K_c = 1$  a stejnou periodu kritických kmitů  $T_{180} = 2\pi$ . Tedy ZNF metoda přiřazuje všem přípustným přenosům stejné parametry regulátorů P, PI a PID. Samozřejmě nás zajímá, zda regulátor s těmito parametry vede na stabilní uzavřenou smyčku anebo ještě lépe, na uzavřenou smyčku s dostatečnou bezpečností ve stabilitě, pro libovolný přípustný přenos  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$ . Podle lemmatu 4.3.1 víme, že k ověření podmínky na bezpečnost ve stabilitě (definovanou pomocí M-indexu) pro celou množinu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$ , stačí ověřit tuto podmínku pouze pro reprezentativní podmnožinu  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$  množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$ . Podle definice 4.3.2 věty 5.3.1 do  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$  patří všechny přípustné systémy odpovídající hranici křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0, \omega \neq 1$ . Připomeňme, že těmito přenosům říkáme extrémální přenosy. Konkrétně jsou extrémální přenosy odpovídající vrcholům ve tvaru

$$V_{(n_1, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m}, \quad (7.2)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice  $(n_1, m)$  probíhá  $(n + 1)$ -člennou posloupnost

$$(n, 0), (n - 1, 0), \dots, (3, 0), (1, 2), (n - 2, 2), (n - 1, 1) \quad (7.3)$$

a extrémální přenosy odpovídající stranám ve tvaru

$$H_{n_1, n_2, m}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2} s^m}, \quad (7.4)$$

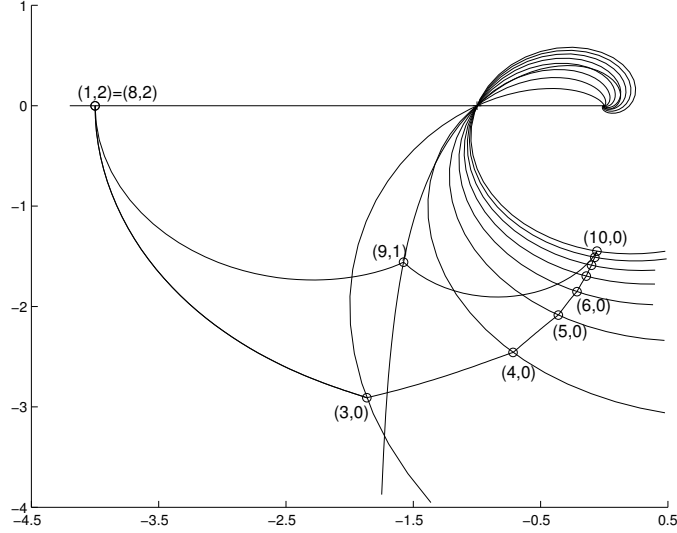
kde  $K_0 > 0$ ,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, m \geq 0, n_1 + n_2 + m \leq n$  a uspořádaná trojice  $(n_1, n_2, m)$  probíhá  $(n + 1)$ -člennou posloupnost

$$(1, n - 1, 0), (1, n - 2, 0), \dots, (1, 2, 0), (n - 3, 1, 2), (n - 2, 1, 1), (n - 1, 1, 0) \quad (7.5)$$

Poznamenejme, že pro objasnění vlastností ZNF metody bude postačovat, omezíme-li se na extrémální přenosy ve tvaru (7.2), neboť vrcholy křivoúhelníka jsou jak dále uvidíme vhodně rozmístěny podél jeho hranice.

### 7.3.1 Případ PI regulátoru

Vlastnosti PI regulátoru navrženého ZNF metodou budeme analyzovat pro případ množinového modelu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(-1, 1)$ , kde  $n = 10$ . Poznamenejme, že zvolené



Obrázek 7.3: Frekvenční charakteristiky extrémálních přenosů (7.2),(7.3) pro  $n = 10$  a křivoúhelník  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$ ,  $\omega = 0, 5$

omezení na řád přípustných přenosů není kritické a že stejné závěry bychom obdrželi pro libovolné  $n \geq 3$ .

Na obr. 7.3 jsou zobrazeny frekvenční charakteristiky extrémálních systémů ve tvaru (7.2), kde uspořádaná dvojice  $(n_1, m)$  probíhá posloupnost (7.3) pro případ  $n = 10$ . Důležité je poznamenat, že extrémální přenosy příslušné dvojicím (1, 2) a (8, 2) v našem případě splývají v přenos

$$V_{(1,2)}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Konkrétní hodnoty parametrů těchto extrémálních přenosů jsou uvedeny v tabulce 7.2. Na obr. 7.3 je též znázorněn křivoúhelník  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$  pro frekvenci  $\omega = 0, 5$ . Připomeňme, že každému jeho bodu odpovídá alespoň jeden přípustný systém  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(-1, 1)$ .

Na obr. 7.4 jsou zobrazeny kompenzované frekvenční charakteristiky

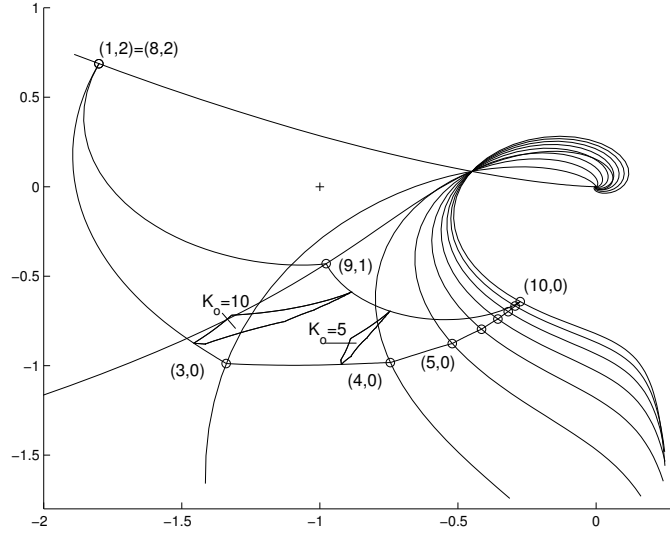
$$L_{(n_1, m)}(j\omega) \triangleq G(j\omega)V_{(n_1, m)}(j\omega), \quad (7.6)$$

kde

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad K = 0, 45, \quad T_i = \frac{2\pi}{1, 2} = 5, 24 \quad (7.7)$$

je přenos PI regulátoru navrženého ZNF metodou pro množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ ,  $V_{(n_1, m)}(s)$  je extrémální přenos ve tvaru (7.2) a dvojice  $(n_1, m)$  opět probíhá posloupnost (7.3) pro případ  $n = 10$ .

Na stejném obrázku je znázorněn též křivoúhelník  $G(j\omega) \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$  pro  $\omega = 0, 5$ . Z jeho tvaru je zřejmé, že všechny přípustné přenosy odpovídající bodům tohoto křivoúhelníka ležícím dostatečně blízko kompenzovaného vrcholu (1, 2) vedou na nestabilní uzavřenou smyčku.



Obrázek 7.4: Frekvenční charakteristiky (7.6) pro PI regulátor a křivoúhelník  $G(j\omega) \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$  pro  $\omega = 0, 5$

Z tab. 7.2 je navíc patrné, že vhodnou volbou přípustného systému lze dosáhnout libovolného M-indexu uzavřené smyčky z intervalu  $\langle 1, 060; +\infty \rangle$ . Z této skutečnosti plyne, že ZNF metoda v původní podobě je pro PI regulátoru zcela nespolehlivá. Dokonce lze snadno dokázat, že jakákoliv modifikace ZNF metody spočívající ve změně konstant v tab. 7.1 pro PI regulátor bude mít podobně špatné vlastnosti. Pokusme se nyní nalézt podmnožinu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ , pro kterou je PI regulátor navržený ZNF metodou vyhovující. Za tímto účelem uvažujme množinu přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ . Jde zřejmě o přenosy, které kromě toho, že patří do  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ , mají ještě dané statické zesílení  $K_0$ . Odpovídající křivoúhelníky  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1; \omega)$ , kde  $\omega = 0, 5$ , jsou pro  $K_0 = 5$  a  $10$  zobrazeny na obr. 7.4. Užitím reprezentativní podmnožiny  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1)$  množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1)$  (viz. věta 5.4.1 a 5.4.2) zjistíme, že M-index uzavřené smyčky se pro  $K_0 = 5$  pohybuje v intervalu  $\langle 1, 69; 2, 514 \rangle$  a pro  $K_0 = 10$  v intervalu  $\langle 2, 05; 4, 88 \rangle$ . Z toho lze usoudit, že ZNF metoda dává vyhovující PI regulátor pouze pro případ  $K_0 < 5$ . Poznamenejme však, že pro  $K_0 < 2$  je sice M-index vždy menší než 1,2, avšak uzavřená smyčka je velmi pomalá z důvodu příliš velké integrační časové konstanty. Z provedené analýzy plyne tedy následující závěr:

*Pro přenosy  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(-K_{180}, \omega_{180})$ ,  $n \geq 3$  dává ZNF metoda vyhovující PI regulátor pouze v případě, kdy je splněna podmínka*

$$2 < \frac{K_0}{K_{180}} < 5,$$

kde  $K_0 = F(0)$ .

$n_1$	$m$	$K_0$	$\tau_1$	ZNF: PI $M_{cl}$	ZNF: PID $M_{cl}$
1	2	1	0	nestabilní	5,767
8	2	1	0	nestabilní	5,767
3	0	7,998	1,732	4,384	1,891
4	0	3,999	0,9999	2,081	1,475
5	0	2,885	0,7265	1,571	1,3689
6	0	2,370	0,5773	1,350	1,3574
7	0	2,075	0,4815	1,228	1,3834
8	0	1,884	0,4142	1,150	1,4230
9	0	1,750	0,3639	1,096	1,468
10	0	1,652	0,3249	1,060	1,511
9	1	1,148	0,1763	2,683	1,898

Tabulka 7.2: Extremální přenosy (7.2),(7.3) pro  $n = 10$  a příslušný M-index uzavřené smyčky s PI resp. PID regulátorem navrženým ZNF metodou

### 7.3.2 Příklad PID regulátoru

Použijeme stejný postup jako v případě PI regulátoru. Uvažujme ideální PID regulátor

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right), \quad (7.8)$$

kde  $K, T_i$  a  $T_d$  jsou určeny podle tab. 7.1, tj.  $K = 0, 6$ ,  $T_i = 3, 14$ ,  $T_d = 0, 785$ . Kompenzované frekvenční charakteristiky (7.6) pro regulátor (7.8) jsou spolu s křivouhelníkem  $G(j\omega) \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$  pro  $\omega = 0, 5$  zobrazeny na obr. 7.5.

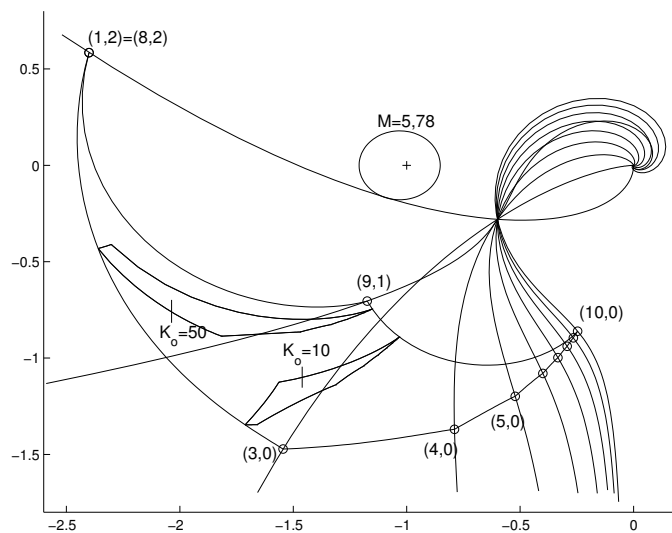
Z tohoto obrázku je zřejmé, že PID regulátor (7.8) vede na stabilní uzavřenou smyčku pro libovolný přípustný přenos  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ . Nejvyšší M-index ze všech přípustných systémů má extremální systém  $V_{(1,2)}(s) = \frac{1}{s^2}$ . Jeho hodnota podle tab. 7.2 je 5,78. Odtud plyne, že příliš vysoký M-index ( $M > 2$ ) lze očekávat u přenosů, které odpovídají bodům ležícím dostatečně blízko vrcholu (1, 2). Na obr. 7.6 jsou zobrazeny odezvy uzavřené smyčky na skokovou změnu poruchy pro všechny přenosy (7.2), (7.3) a PID regulátor (7.8).

Uvažujme nyní množinu přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1)$ . Odpovídající křivouhelníky  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1; \omega)$ ,  $\omega = 0, 5$  jsou pro  $K_0 = 10$  a 50 zobrazeny též na obr. 7.4. Užitím reprezentativní podmnožiny  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1)$  množiny  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{10}(K_0, 0; -1, 1)$  (viz věta 5.4.1 a 5.4.2) zjistíme, že M-index uzavřené smyčky se pro  $K_0 = 10$  pohybuje v intervalu  $\langle 1, 54; 2, 0 \rangle$  a pro  $K_0 = 50$  v intervalu  $\langle 1, 82; 3, 16 \rangle$ . Pro  $K_0 < 2$  podobně jako u PI regulátoru zjistíme, že M-index je sice vždy menší než 1,43, avšak uzavřená smyčka je příliš pomalá z důvodu velké integrační časové konstanty  $T_i$ . Na základě těchto skutečností lze formulovat následující závěr:

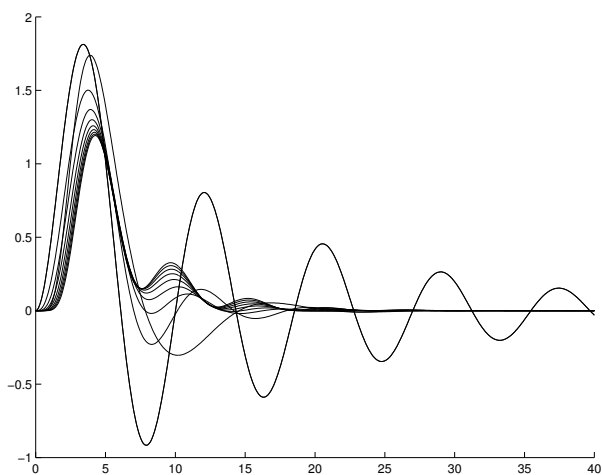
*Pro přenosy  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(-K_{180}, \omega_{180})$ ,  $n \geq 3$  je ZNF metoda pro PID regulátor nespolehlivá. Přijatelné hodnoty parametrů  $K, T_i$  a  $T_d$  může dávat pouze při splnění podmínky*

$$2 < \frac{K_0}{K_{180}} < 10,$$

kde  $K_0 = F(0)$ .



Obrázek 7.5: Frekvenční charakteristiky (7.6) pro PID regulátor a křivóuhelník  $G(j\omega) \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^{10}(-1, 1; \omega)$  pro  $\omega = 0, 5$



Obrázek 7.6: Odezvy na jednotkový skok v poruše  $d$  pro uzavřené smyčky s regulátorem (7.8) a extrémální přenosy (7.2),(7.3) pro  $n = 10$ .

## 7.4 Nová modifikace ZNF metody

Z předcházející analýzy víme, že ZNF metoda je velmi nespolehlivá. Hledejme tedy její modifikaci spočívající v tom, že za výchozí informaci pro návrh regulátoru nevezmeme bod frekvenční charakteristiky s fázovým zpožděním  $180^\circ$ , ale s nějakým jiným chytře vybraným fázovým zpožděním z intervalu  $(0^\circ, 180^\circ)$ , řekněme  $\varphi_0$ . Z kap. 3 lze usuzovat, že vhodné  $\varphi_0$  bude záviset na uvažované množině přípustných systémů, na typu regulátoru a na návrhovém parametru  $M$ . Abychom vyšetřili tuto závislost, budeme nyní řešit příslušné úlohy RNR s množinovým modelem  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$  pro různé hodnoty  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Poznamenejme, že obecný případ jednobodového množinového modelu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$   $\omega_1 > 0$  lze snadno převést na tento případ. Podle věty 4.3.1 víme, že se při numerickém řešení úlohy RNR můžeme omezit pouze na přípustné systémy, které patří do reprezentativní podmnožiny  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ . Připomeňme, že do množiny  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$  patří právě všechny přípustné přenosy odpovídající hranici křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ , kde  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$  je libovolná. Odtud plyne, že reprezentativní množina  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$  je jednodimenzionální a že lze tedy snadno sestavit konečnou posloupnost přenosů, která je dostatečně „hustá“ v  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ . Význačné prvky této posloupnosti zřejmě budou přenosy odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ , které jsou podle věty 5.3.1 ve tvaru

$$V_{(n_1, m)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} s^m}, \quad (7.9)$$

kde  $K_0 > 0$ ,  $\tau_1 > 0$  a uspořádaná dvojice  $(n_1, m)$  probíhá v případě  $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$  posloupnost

$$(n, 0), (n-1, 0), \dots, (1, 0) \quad (7.10)$$

a v případě  $\varphi \in (90^\circ, 180^\circ)$  posloupnost

$$(n, 0), (n-1, 0), \dots, (2, 0), (1, 1), (n-1, 1). \quad (7.11)$$

Vlastní numerické řešení příslušných úloh RNR budeme hledat pomocí algoritmu, který se podobá prototypovému algoritmu popsánému v kap. 4. Jeho detailní popis z důvodu stručnosti neuvádíme.

### 7.4.1 Příklad PI regulátoru

Uvažujme úlohu RNR, kde přípustný regulátor je PI regulátor s přenosem

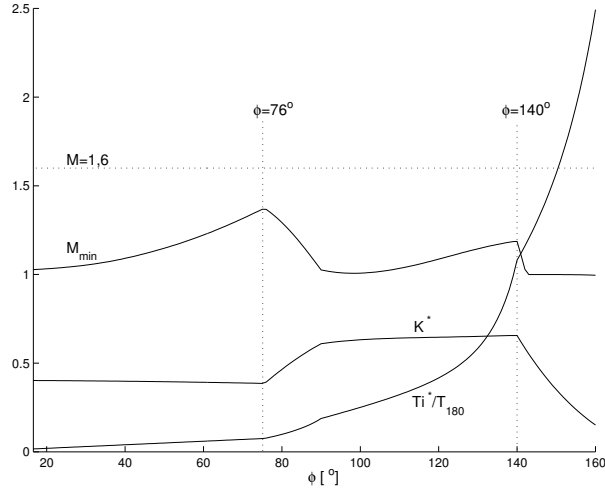
$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (7.12)$$

a parametry  $K > 0$ ,  $T_i > 0$ , množina přípustných přenosů je  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ , požadovaná bezpečnost ve stabilitě je zadaná návrhovým parametrem  $M$  a kritérium optimality je dané vztahem (4.3). Na takto definovanou úlohu se budeme dále odkazovat pomocí trojice  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M)$ .

Uvažujme úlohu  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6)$  pro  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Numerickým řešením této úlohy získáme závislosti  $K_\varphi^*$ ,  $T_{i\varphi}^*$  robustně optimálního PI regulátoru na fázovém zpoždění  $\varphi$  zobrazené na obr. 7.7.

Nyní budeme podrobně zkoumat vlastnosti obdrženého řešení.





Obrázek 7.7: Řešení úlohy  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6)$  pro  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$

### Aktivní extrémální přenosy

Pro  $\varphi \in (0^\circ, 76^\circ)$  nastává dotyk mezi  $M$ -kružnicí a frekvenčními charakteristikami otevřené smyčky pouze pro jediný extrémální přenos  $F(s) = V_{(20,0)}(s)$ , kde  $V_{(n_1,m)}(s)$  je ve tvaru (7.9). V intervalu  $\varphi \in (76^\circ, 90^\circ)$  se  $M$ -kružnice dotýkají kompenzované frekvenční charakteristiky dvou extrémálních přenosů  $V_{(20,0)}(s)$  a  $V_{(1,0)}(s)$ . Podobně pro  $\varphi \in (90^\circ, 140^\circ)$  jsou aktivní extrémální přenosy ve tvaru  $V_{(20,0)}(s)$  a  $V_{(1,1)}(s)$  a konečně pro  $\varphi \in (140^\circ, 180^\circ)$  je aktivní pouze jeden extrémální přenos ve tvaru  $V_{(1,1)}(s)$ . V daném případě tedy hrají aktivní roli pouze tři extrémální přenosy  $V_{(20,0)}(s)$ ,  $V_{(1,0)}(s)$  a  $V_{(1,1)}(s)$ . Tento fakt potvrzuje obr. 7.8, na kterém jsou zobrazeny kompenzované frekvenční charakteristiky všech extrémálních přenosů ve tvaru (7.9) po řadě pro  $\varphi = 40^\circ, 50^\circ, \dots, 150^\circ$ .

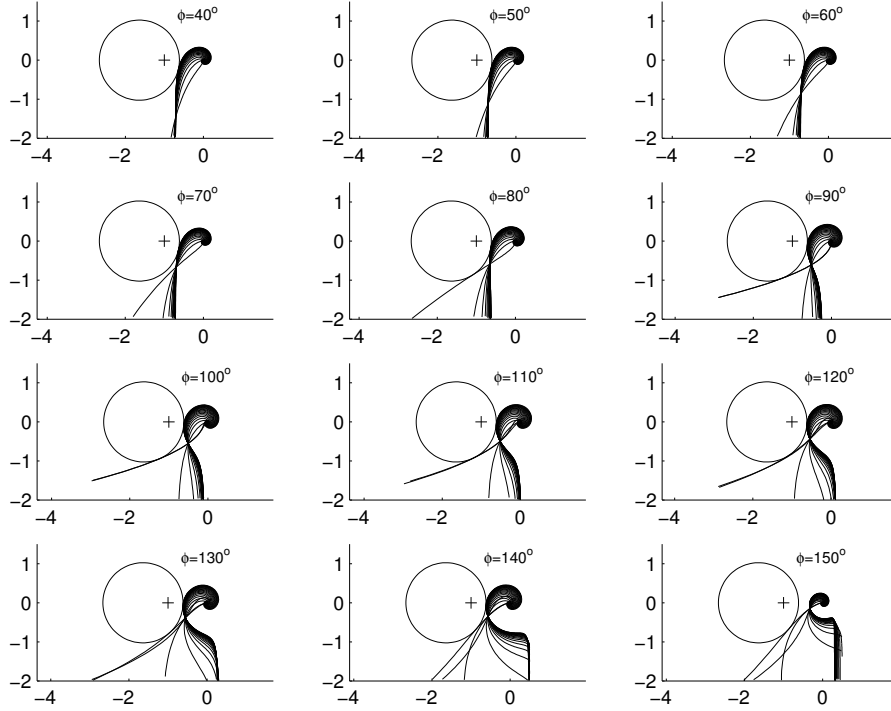
### Rozptyl $M$ -indexu

Pro dané  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$  vede robustně optimální PI regulátor na uzavřenou smyčku, jejíž  $M$ -index probíhá v závislosti na  $F(s) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1)$  interval  $\langle M_{min}(\varphi); 1, 6 \rangle$ . Závislost  $M_{min}(\varphi)$  je zobrazena na obr. 7.7. Nejvyšší hodnota  $M_{min}(\varphi)$  je dosažena pro  $\varphi = 76^\circ$ . Pro toto fázové zpoždění je tedy dosažen nejmenší rozptyl v  $M$ -indexu. Všimněme si ještě, že další lokální extrém funkce  $M_{min}(\varphi)$  nastává pro  $\varphi = 140^\circ$ . Je-li  $\varphi > 140^\circ$ , potom  $M_{min}(\varphi)$  rychle klesá k 1.

### Kvalita řízení

Uvažujme libovolný systém  $\overline{F}(s)$  ve tvaru

$$\overline{F}(s) = \frac{K_0}{p(s)}, \quad (7.13)$$



Obrázek 7.8: Kompenzované frekvenční charakteristiky extrémálních přenosů (7.9) pro  $\varphi = 40^\circ, 50^\circ, \dots, 150^\circ$ .

kde  $K_0 > 0$  a  $p(s)$  je polynom s reálnými nezápornými koeficienty stupně maximálně  $n$ , jehož všechny kořeny leží v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Předpokládejme dále, že platí

$$\begin{aligned} \arg \overline{F}(j\omega_\varphi) &= \varphi \\ |\overline{F}(j\omega_\varphi)| &= r_\varphi, \end{aligned} \quad (7.14)$$

potom je zřejmý přenos

$$F(s) = \frac{1}{r_\varphi} \overline{F}(\omega_\varphi s)$$

prvkem námi uvažované množiny přípustných systémů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ . Známe-li tedy jeden bod frekvenční charakteristiky  $\overline{F}(j\omega)$  odpovídající fázovému zpoždění  $\varphi$ , potom můžeme zřejmě určit parametry  $\overline{K}_\varphi^*$ ,  $\overline{T}_{i\varphi}^*$  robustně optimálního PI regulátoru pro množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(r_\varphi e^{-j\varphi}, \omega_\varphi)$  pomocí vztahů (měřítkování v zesílení a času)

$$\overline{K}_\varphi^* = \frac{K_\varphi^*}{r_\varphi} \quad \overline{T}_{i\varphi}^* = \frac{T_{i\varphi}^*}{\omega_\varphi}, \quad (7.15)$$

kde  $K_\varphi^*$  a  $T_{i\varphi}^*$  jsou parametry robustně optimálního PI regulátoru pro množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ .

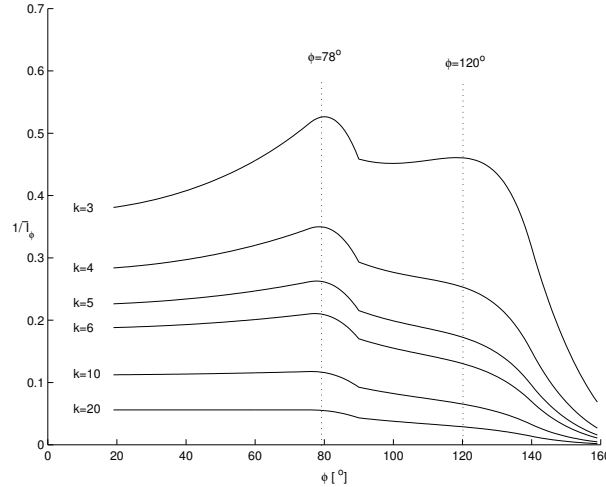
Vyšetřujeme nyní pro náš konkrétní případ  $n = 20$ ;  $M = 1, 6$  kvalitu řízení

$$\bar{T}_\varphi \triangleq \frac{\bar{T}_{i\varphi}^*}{K_0 \bar{K}_\varphi} = \frac{T_{i\varphi}^* r_\varphi}{K_0 K_\varphi^* \omega_\varphi} \quad (7.16)$$

odpovídající uzavřené smyčce s řízeným systémem (7.13) a PI regulátorem s parametry (7.15). Na obr.7.9 jsou zobrazeny průběhy převrácené hodnoty funkcí  $\bar{T}_\varphi$  pro testovací systémy

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n = 3, 4, \dots, 20 \quad (7.17)$$

v intervalu  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Z obrázku je patrné, že všechny tyto funkce mají globální extrém v blízkosti  $\varphi = 76^\circ$ . Tento fakt lze interpretovat následovně: Můžeme-li si vybrat pouze jediný bod, řekněme  $F_1, \omega_1$ , z frekvenční charakteristiky kteréhokoliv systému (7.17) a poté z něho určit robustně optimální PI regulátor pro množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1)$  a návrhový parametr  $M = 1, 6$ , potom nejvyšší kvalitu řízení (7.16) (pro příslušný systém (7.17)) obdržíme tehdy, jestliže  $\arg F_1$  má hodnotu blízkou  $-76^\circ$ . Všimněme si však, že průběh funkce  $\frac{1}{\bar{T}_\varphi}$  je v našem případě relativně plochý a podstatný pokles nastává až pro  $\varphi > 120^\circ$ .



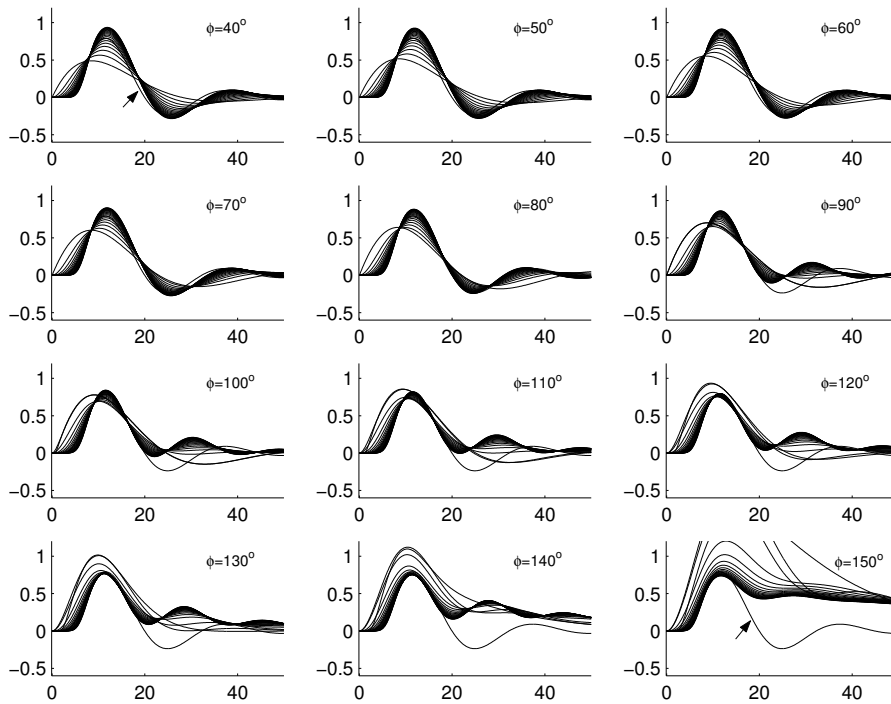
Obrázek 7.9: Průběhy funkcí  $\frac{1}{\bar{T}_\varphi}$  pro systémy (7.17).

Uvažujme nyní případ

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{(s+1)^8} \quad (7.18)$$

a provedme návrh robustně optimálního PI regulátoru na základě znalosti jediného bodu frekvenční charakteristiky  $\bar{F}(j\omega_\varphi)$ , pro který platí (7.14). Přesněji, řešme úlohu RNR danou trojicí (PI;  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(\bar{F}(j\omega_\varphi), \omega_\varphi)$ ; 1, 6) pro  $\varphi = 40^\circ, 50^\circ, \dots, 150^\circ$ . Kvalitu řízení budeme posuzovat podle odezvy uzavřené smyčky na jednotkový skok v poruše působící na vstup řízeného systému. Na obr. 7.10 jsou zobrazeny tyto odezvy pro všechny extrémální přenosy ve tvaru (7.9) množinového modelu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(\bar{F}(j\omega_\varphi), \omega_\varphi)$ . Na každém

podobrázku pro dané  $\varphi$  je navíc zobrazena odezva uzavřené smyčky, kterou tvoří systém (7.18) s optimálním regulátorem (ve smyslu kap. 3) navrženým speciálně pro tento systém. Tuto odezvu poznáme podle šipky v prvním a posledním podobrázku. To nám umožňuje posoudit rozdíl mezi kvalitou řízení dosaženou regulátorem navrženým na základě úplné informace o řízeném systému a regulátorem navrženým pouze na základě jednoho bodu frekvenční charakteristiky. Z obr. 7.10 je patrné, že tento rozdíl je v našem případě pro  $\varphi < 90^\circ$  zanedbatelný a pro  $\varphi < 120^\circ$  nepříliš výrazný. Teprve pro  $\varphi > 140^\circ$  je kvalita řízení robustně optimálního regulátoru nevyhovující. Poznamenejme, že podobný závěr lze provést i pro všechny přenosy  $\bar{F}(s)$  ve tvaru (7.17).



Obrázek 7.10: Odezvy na jednotkový skok v poruše pro úlohu  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(\bar{F}(j\omega_\varphi), \omega_\varphi); 1, 6)$ , kde  $\bar{F}(s)$  je daný vztahem (7.18).

### Modifikace ZNF metody pro PI regulátor

V tab. 7.3 jsou shrnuty výsledky obdržené numerickým řešením některých úloh  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro vybrané hodnoty  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$  je užito následující označení:  $\varphi_1, \varphi_2$  jsou po řadě začátek a konec (ve stupních) intervalu, ve kterém jsou aktivní alespoň dva extrémální přenosy (mimo tento interval je to pouze jeden),  $K_l^*, T_{il}^*, l = 1, 2$  jsou parametry PI regulátoru získané řešením úlohy  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro  $\varphi = \varphi_l$ .

Použití tab. 7.3 pro určení robustně optimálního PI regulátoru ukážeme na příkladu. Předpokládejme, že řízený systém lze popsat některým přenosem

$M = 1, 2$						
n	$\varphi_1$	$K_1^*$	$T_{i1}^*$	$\varphi_2$	$K_2^*$	$T_{i2}^*$
5	66	0,5933	0,6449	127	0,7465	9,2628
20	59	0,3749	0,4175	131	0,5986	10,4724
100	58	0,3366	0,3799	132	0,5552	10,6302
$M = 1, 6$						
5	84	0,6039	0,7437	137	0,7729	6,1129
20	76	0,3938	0,4879	140	0,6555	6,7935
100	74	0,3457	0,4296	141	0,6194	7,040
$M = 2, 0$						
5	96	0,6126	0,8157	144	0,7961	6,0983
20	84	0,3991	0,4975	146	0,7011	6,5494
100	82	0,3583	0,4466	147	0,6593	6,8224

Tabulka 7.3: Modifikovaná ZNF metoda pro PI regulátor

z množiny apriorně přípustných přenosů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n$ , kde  $n = 20$ . Dále předpokládáme, že jsme identifikačním experimentem získali jeden bod  $F_1, \omega_1$  frekvenční charakteristiky řízeného systému, který odpovídá fázovému zpoždění  $\varphi = 76^\circ$ . Nyní můžeme určit robustně optimální PI regulátor pro návrhový parametr  $M = 1, 6$  pomocí vztahů (7.15)

$$K^* = \frac{0,3938}{|F_1|} \quad T_i^* = \frac{0,4879}{\omega_1}.$$

Je-li pro výpočet PI regulátoru použit bod frekvenční charakteristiky s fázovým zpožděním  $\varphi_0 \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ , potom máme zaručený rozumný výsledek. Nejlepší PI regulátor však obdržíme přibližně pro  $\varphi_0 = \varphi_1$ . Bohužel odhad bodu s fázovým zpožděním  $\varphi_1$  vyžaduje zřejmě delší identifikační experiment než odhad bodu pro  $\varphi_2$ .

Poznamenejme, že řešením úloh  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-,1}^n(e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro  $\varphi \in (90^\circ, 180^\circ)$  lze podobně nalézt spolehlivou modifikaci ZNF metody určenou speciálně pro astatické systémy.

## 7.4.2 Příklad PID regulátoru

Uvažujme úlohu RNR, kde přípustný regulátor je PID regulátor s přenosem

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right) \quad (7.19)$$

a parametry  $K > 0, T_i > 0, T_d > 0, N \in \langle 3; 20 \rangle$ , množina přípustných přenosů je  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1)$ , požadovaná bezpečnost ve stabilitě je zadána návrhovým parametrem  $M$  a kritérium optimality je dané vztahem (4.3). Na takto definovanou úlohu se budeme podobně jako v předchozím případě odkazovat pomocí čtveřice  $(PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M; N)$ . Upřesněme, že řešením této úlohy jsou parametry  $K, T_i$  a  $T_d$  robustně optimálního PID regulátoru. Parametr  $N$  má dopředu danou hodnotu a může být chápán jako další návrhový parametr. (Poznamenejme, že hodnota  $N$  se obvykle volí podle velikosti vysokofrekvenčního šumu obsaženého v regulované veličině.)

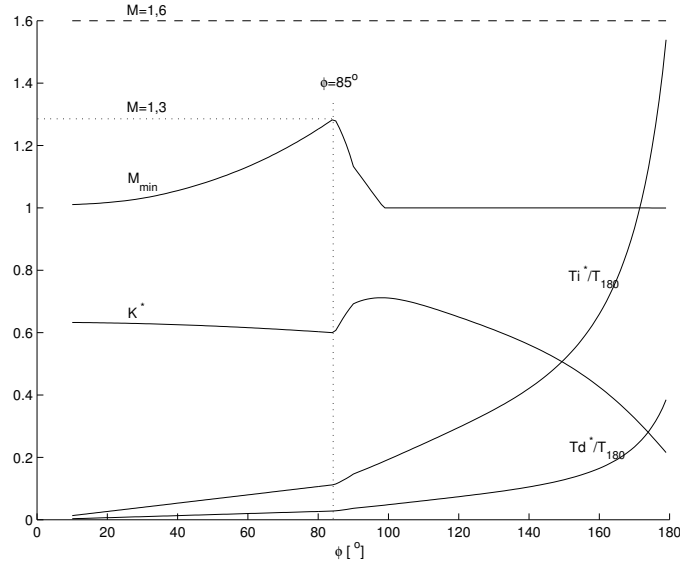
Nyní budeme podrobně zkoumat úlohu  $(PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6; 10)$  pro  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Budeme při tom postupovat zcela analogicky k případu PI regulátoru, a z tohoto důvodu se omezíme na pouhé uvedení příslušných výsledků. Numerickým řešením této úlohy získáme závislosti  $K_\varphi^*$ ,  $T_{i\varphi}^*$ ,  $T_{d\varphi}^*$  robustně optimálního PID regulátoru na fázovém zpoždění  $\varphi$  zobrazené na obr.7.11. Obdržené řešení má následující vlastnosti:

### Aktivní extrémální přenosy

V intervalu  $\varphi \in (0^\circ, 85^\circ)$  je aktivní pouze extrémální přenos  $V_{(20,0)}(s)$  ve tvaru (7.9). V intervalu  $\varphi \in (85^\circ, 90^\circ)$  jsou to dva extrémální přenosy  $V_{(20,0)}(s)$  a  $V_{(1,0)}(s)$  ve tvaru (7.9) a konečně v intervalu  $\varphi \in (90^\circ, 180^\circ)$  jsou též dva extrémální přenosy  $V_{(20,0)}(s)$  a  $V_{(1,1)}(s)$  ve tvaru (7.9). Tyto skutečnosti potvrzuje obr. 7.12, na kterém jsou zobrazeny kompenzované frekvenční charakteristiky všech extrémálních přenosů ve tvaru (7.9) po řadě pro  $\varphi = 40^\circ, 50^\circ, \dots, 150^\circ$ .

### Rozptyl M-indexu

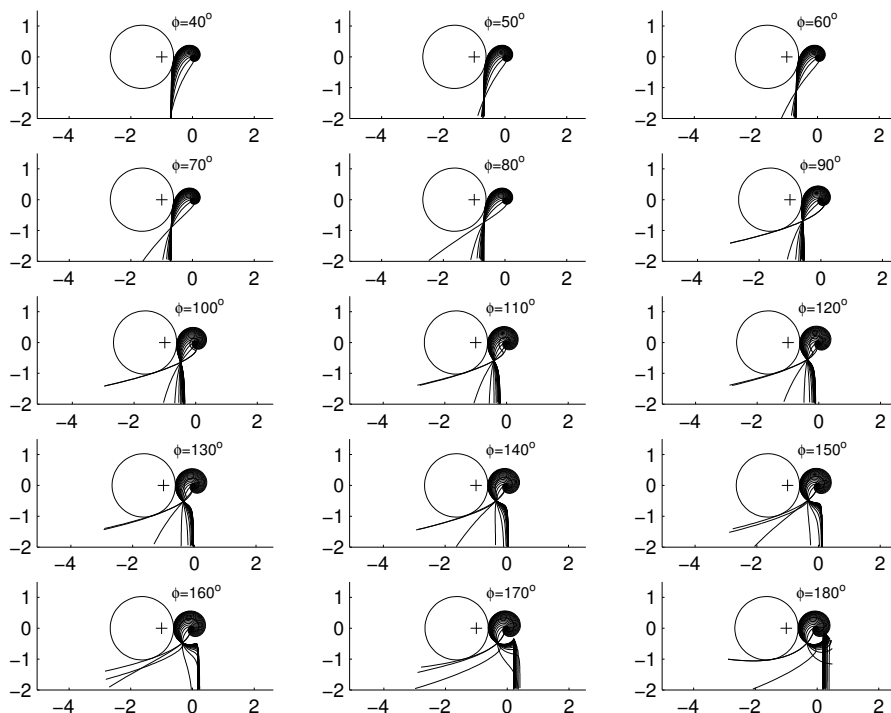
Minimální rozptyl M-indexu nastává pro  $\varphi = 85^\circ$ . Funkce  $M_{min}(\varphi)$  je rostoucí na intervalu  $\varphi \in (0^\circ, 82^\circ)$  a nerostoucí na intervalu  $\varphi \in (85^\circ, 180^\circ)$ .



Obrázek 7.11: Řešení úlohy  $(PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6; 10)$  pro  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$

### Kvalita řízení

Průběhy funkcí  $\frac{1}{\bar{I}_\varphi}$ , kde  $\bar{I}_\varphi$  je dané vztahem (7.16), pro přenosy (7.17) jsou zobrazeny na obr. 7.13. Na obr. 7.14 jsou zobrazeny odezvy na skok v poruše uzavřené smyčky s robustně optimálním PID regulátorem pro všechny extrémální přenosy ve tvaru (7.9) množinového modelu  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^{20}(\bar{F}(j\omega_\varphi), \omega_\varphi)$ , kde  $\bar{F}(s)$



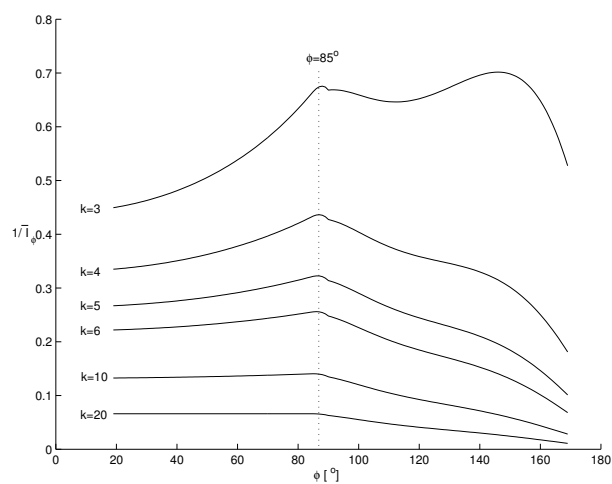
Obrázek 7.12: Kompenzované frekvenční charakteristiky extrémálních přenosů (7.9) pro  $\varphi = 40^\circ, 50^\circ, \dots, 180^\circ$

je přenos (7.18). Na každém podobrázku pro dané  $\varphi$  je navíc zobrazena odezva uzavřené smyčky, kterou tvoří systém (7.18) s optimálním PID regulátorem ve smyslu kap. 3. Tuto odezvu poznáme podle šipky v prvním a posledním podobrázku. Všimněme si, že až do přibližně  $\varphi = 130^\circ$  je tvar odezvy celkem přijatelný. Nejlepší odezva je však zřejmě dosažena pro některé  $\varphi \in (80^\circ, 90^\circ)$ .

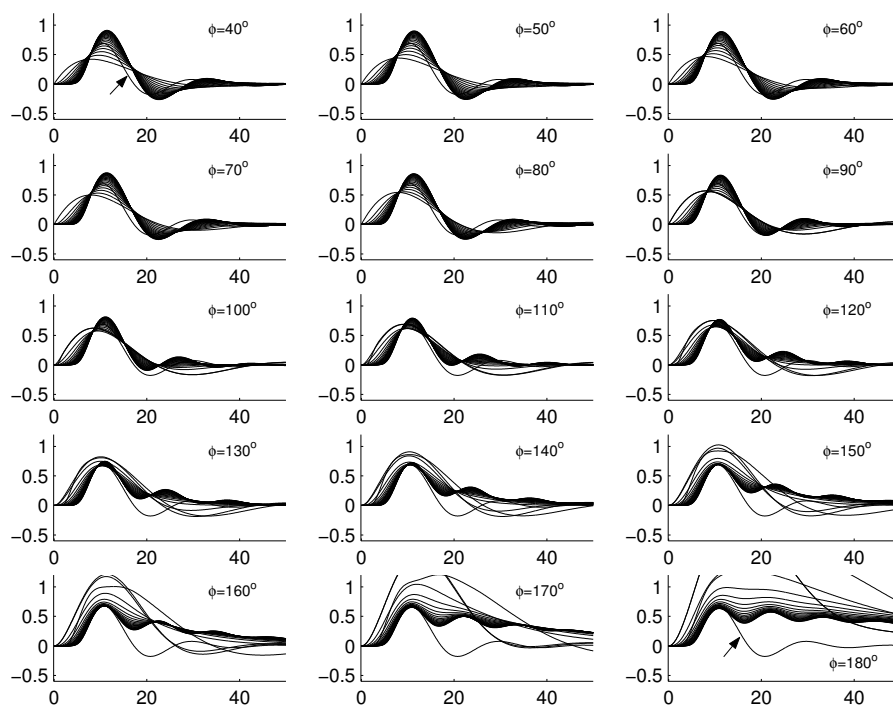
### Modifikace ZNF metody pro PID regulátor

V tab. 7.4 jsou shrnuty výsledky obdržené numerickým řešením některých úloh ( $PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M; 10$ ) pro vybrané hodnoty  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Je užito následujícího označení:  $\varphi_1$  je počáteční bod intervalu  $\langle \varphi_1, 180^\circ \rangle$ , ve kterém jsou aktivní alespoň dva extrémální přenosy (připomeňme, že v bodě  $\varphi = \varphi_1$  je dosažen nejmenší rozptyl  $M$ -indexu). Bod  $\varphi_2$  je vybrán subjektivně pokud možno co největší, tak aby příslušné odezvy na poruchu byly ještě vyhovující. Parametry PID regulátoru získané řešením úlohy ( $PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^n(e^{-j\varphi}, 1); M; N$ ), pro  $\varphi = \varphi_l$ , jsou označeny  $K_l^*, T_{il}^*, T_{dl}^*, l = 1, 2$ .

Známe-li jeden bod  $F_1, \omega_1$  frekvenční charakteristiky odpovídající fázovému zpoždění  $\varphi_l, l = 1, 2$ , potom můžeme určit parametry robustně optimálního



Obrázek 7.13: Průběhy funkcí  $\frac{1}{T_\varphi}$  pro systémy (7.17) a úlohy ( $PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6, 10$ )



Obrázek 7.14: Odezvy na jednotkový skok v poruše pro úlohu ( $PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}-}^{20}(e^{-j\varphi}, 1); 1, 6, 10$ ).



$M = 1, 2$								
n	$\varphi_1$	$K_1^*$	$T_{i1}^*$	$T_{d1}^*$	$\varphi_2$	$K_2^*$	$T_{i2}^*$	$T_{d2}^*$
5	78	1,0906	0,9907	0,2477	90	1,1060	2,0370	0,5092
20	66	0,5779	0,6078	0,1520	70	0,6325	0,7403	0,1851
100	66	0,5450	0,6070	0,1517	70	0,5850	0,7450	0,1860
$M = 1, 6$								
5	116	1,0070	1,4250	0,3562	150	0,8752	2,7130	0,6783
20	85	0,6072	0,7213	0,1803	130	0,6089	2,2180	0,5544
100	85	0,5800	0,7438	0,1860	130	0,5268	2,3620	0,5905
$M = 2, 0$								
5	136	0,9555	1,6610	0,4152	170	0,7819	3,4370	0,8593
20	98	0,6254	0,7908	0,1977	150	0,6496	2,4290	0,6074
100	98	0,6129	0,7976	0,1994	150	0,5810	2,5020	0,6250

Tabulka 7.4: Modifikovaná ZNF metoda pro PID regulátor ( $N = 10$ )

PID regulátoru pomocí vztahů

$$K^* = \frac{K_l^*}{|F_1|} \quad T_i^* = \frac{T_{il}^*}{\omega_1} \quad T_d^* = \frac{T_{dl}^*}{\omega_1},$$

kde  $K_l^*, T_{il}^*, T_{dl}^*$  jsou příslušné hodnoty z tab. 7.4.

## 7.5 Dvoubodová metoda

Poněvadž množina přípustných systémů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1)$ ,  $\omega_1 > 0$  je ještě dosti „široká“, je vhodné snažit se ji zúžit přidáním další informace (pokud možno experimentálně snadno zjistitelné). V našem kontextu to znamená přidat další bod frekvenční charakteristiky řízeného systému. Zvolíme-li druhý bod s frekvencí větší než nula, potom jsme zvýšili počet charakteristických čísel popisujících řízený systém o dvě a z kap. 5 víme, že množina přípustných systémů  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(F_1, \omega_1; F_2, \omega_2)$ , kde  $0 < \omega_1 < \omega_2$ , je v tomto případě již velmi „úzká“. Lépe řečeno, zbytečně úzká pro svůj účel – návrh regulátoru. Uvažujme proto množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(\bar{K}_0, 0; F_2, \omega_2)$ , který odpovídá případu, kdy známe dva body frekvenční charakteristiky s frekvencemi  $\omega_1 = 0$  a  $\omega_2 > 0$ . Poznamenejme, že v tomto případě je další přidání bodu charakterizovaný pouze jedním číslem – statickým zesílením  $\bar{K}_0$ . Užitím metody měřítkování v čase a zesílení můžeme bez omezení obecnosti přejít na bezrozměrný množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1)$ , kde  $K_0 \in (1, +\infty)$  a  $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

Nyní se zabýváme úlohou RNR, kde přípustný regulátor je PI resp. PID regulátor s přenosem (7.12) resp.(7.19) s pevně zvoleným parametrem  $N$ , množina přípustných systémů je  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1)$ , požadovaná bezpečnost ve stabilitě je zadaná návrhovým parametrem  $M$  a kritérium optimality je dané vztahem (4.3). Na takto definovanou úlohu se budeme podobně jako dříve odkazovat pomocí trojice (PI;  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M$ ) resp. čtveřice (PID;  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M; N$ ). Abychom mohli porovnat výsledky získané řešením uvedených úloh s empirickým zpřesněním ZNF metody uvedeným v [42], omezíme se pouze na případ  $\varphi = 180^\circ$ . Poznamenejme však, že podle výsledků předchozího oddílu je mnohem vhodnější volit  $\varphi < 180^\circ$ .

### 7.5.1 Příklad PI regulátoru

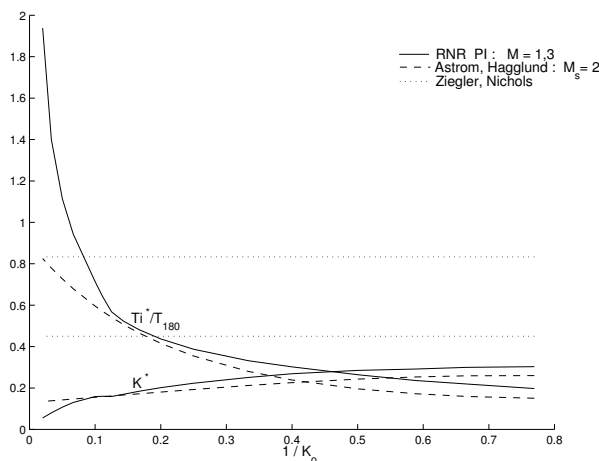
Numerickým řešením úlohy  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$  a několik hodnot  $K_0$  z intervalu  $(1, 50)$  získáme tab. 7.5.

$K_0$	1,3	1,5	1,7	2,0	2,5	3,0
$K^*$	0,3032	0,2999	0,2919	0,2849	0,2688	0,2509
$T_i^*$	1,242	1,377	1,484	1,659	1,897	2,086

$K_0$	4,0	5,0	10	20	30	50
$K^*$	0,2231	0,2016	0,1584	0,1077	0,0802	0,0556
$T_i^*$	2,434	2,746	4,485	6,996	8,791	12,18

Tabulka 7.5: Řešení úlohy  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$

Závislost parametrů  $K^*$ ,  $T_i^*$  robustně optimálního PI regulátoru na velikosti statického zesílení  $K_0$  je zobrazena na obr. 7.15. Ve stejném obrázku jsou čárkovaně zobrazeny též průběhy parametrů PI regulátoru, které navrhl Aström a Hagglund v [42] jako empirické zpřesnění ZNF metody. Všimněme si, že pro  $K_0 > 10$  se příslušné křivky parametrů značně odlišují.



Obrázek 7.15: Řešení úlohy  $(PI; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M)$  pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$

Nyní stručně vyšetříme vlastnosti získaného řešení.

#### Aktivní extrémální přenosy

Nejprve konstatujme, že všechny extrémální přenosy odpovídající vrcholům křivohelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega \neq 1$  jsou podle věty 5.4.1 ve tvaru

$$V_{(n_1, n_2)}(s) = \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}}, \quad (7.20)$$

kde  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$  a uspořádaná dvojice  $(n_1, n_2)$  probíhá jistou konečnou posloupnost. Aktivní roli v námi uvažované úloze však hrají v závislosti na  $K_0$  pouze extrémální přenosy (7.20) odpovídající následujícím uspořádaným dvojicím  $(n_1, n_2)$ :

$$\begin{aligned}
K_0 = 1, 3 &: & (19, 1) \\
K_0 = 1, 5 &: & (19, 1), (18, 2) \\
K_0 = 1, 7; \dots; 5 &: & (18, 2), (17, 3) \\
K_0 = 10; 20 &: & (1, 2), (18, 2) \\
K_0 = 50 &: & (1, 2), (19, 1)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Tuto skutečnost lze s výhodou využít při řešení úlohy pro množinový model  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1)$  odpovídající případu  $n \rightarrow \infty$ . Extrémální přenosy  $V_{(n-k, k)}(s)$ ,  $k = 1, 2, 3$  přecházejí totiž do tvaru

$$V_{(\infty, k)}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{(n-k, k)}(s) = \frac{K_0 e^{-Ds}}{(\tau s + 1)^k}. \tag{7.22}$$

V této souvislosti se ještě všimněme, že často užívaný návrh PI regulátoru na základě nominálního modelu (7.22) pro  $k = 1$  je správný podle (7.21) pouze pro systémy s dominantním dopravním zpožděním. V ostatních případech je nutné použít dva vhodné „reprezentativní“ modely z následujících tvarů

$$\frac{K_0 e^{-Ds}}{(\tau s + 1)}, \quad \frac{K_0 e^{-Ds}}{(\tau s + 1)^2}, \quad \frac{K_0 e^{-Ds}}{(\tau s + 1)^3}, \quad \frac{K_0}{(\tau_1 s + 1)^{n_1} (\tau_2 s + 1)^{n_2}},$$

kde  $D, \tau > 0$  a  $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ .

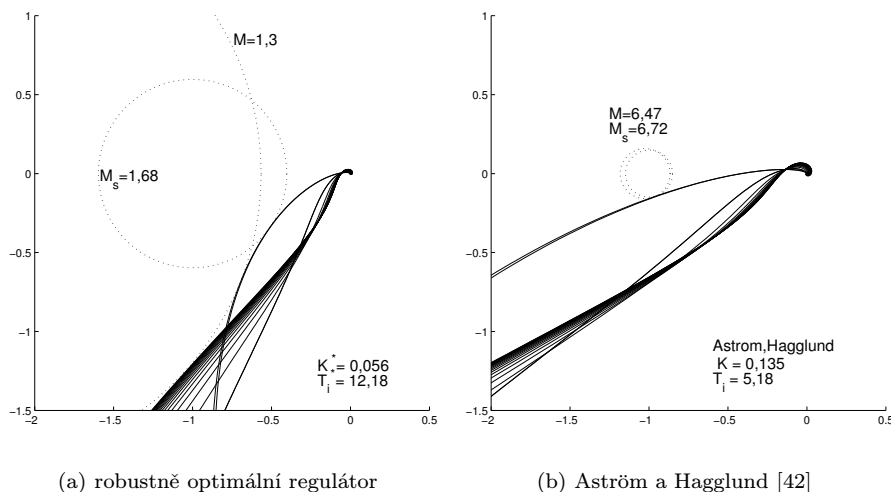
### Porovnání s Aströmovou – Hagglundovou metodou

Na obr. 7.16 jsou zobrazeny všechny kompenzované přenosy odpovídající vrcholům křivoúhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $K_0 = 50$  pro robustně optimální PI regulátor obr. 7.16a a PI regulátor navržený Aströmovou – Hagglundovou metodou obr. 7.16b. Odtud je patrné, že Aströmova – Hagglundova metoda vede pro některé přípustné systémy na nepřijatelně vysoký M-index uzavřené smyčky.

### 7.5.2 Příklad PID regulátoru

Numerickým řešením úlohy  $(PID; \mathcal{S}_{\mathbb{R}^-}(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M; N)$  pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$ ,  $N = 10$  a několik hodnot  $K_0$  z intervalu  $(1, 50)$  získáme tab. 7.6.

Závislost parametrů  $K^*, T_i^*, T_d^*$  robustně optimálního PID regulátoru na velikosti statického zesílení  $K_0$  je zobrazena na obr.7.17. Ve stejném obrázku jsou čárkovaně zobrazeny též průběhy parametrů PID regulátoru, které pro tento případ navrhli Aström a Hagglund v [42] jako empirické zpřesnění ZNF metody. Všimněme si, že pro  $K_0 > 10$  se příslušné křivky parametrů značně odlišují.



Obrázek 7.16: Kompenzované frekvenční charakteristiky extrémálních přenosů (7.20) pro  $K_0 = 50$  PI regulátorem

$\bar{K}_0$	1,3	1,5	1,7	2,0	2,5	3,0
$K^*$	0,4663	0,4703	0,4737	0,4776	0,4784	0,4855
$T_i^*$	1,698	1,749	1,886	2,075	2,336	2,601
$T_d^*$	0,4245	0,4373	0,4715	0,5187	0,5840	0,6503

$\bar{K}_0$	4,0	5,0	10	20	30	50
$K^*$	0,4914	0,5051	0,4797	0,4200	0,3816	0,3374
$T_i^*$	3,034	3,427	4,280	5,155	5,811	6,730
$T_d^*$	0,7585	0,8567	1,070	1,289	1,453	1,682

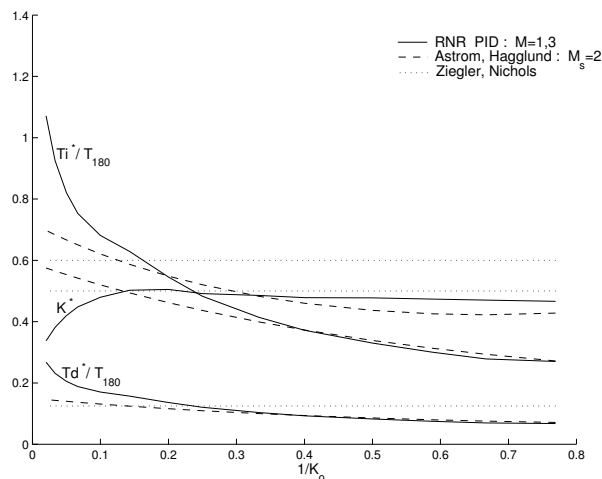
Tabulka 7.6: Řešení úlohy  $(PID; S_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M; N)$  pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$ ,  $N = 10$

### Aktivní extrémální přenosy

V námi uvažované úloze jsou pro libovolné  $K_0$  aktivní vždy pouze dva extrémální přenosy ve tvaru (7.20), které odpovídající uspořádaným dvojicím  $(n_1, n_2)$  ve tvaru  $(1, k)$  a  $(n - k, k)$ , kde  $k = 1, 2, 3, 4$ . Zdá se dokonce, že tato tvrzení platí pro libovolné  $n$  a libovolné  $M \leq 1, 6$ . (Všimněme si ještě, že v případě PI regulátoru stačí uvažovat pouze  $k = 1, 2, 3$ .) Poznamenejme, že platnost této hypotézy by dále podstatným způsobem zjednodušila numerické řešení úlohy RNR pro případ PI a PID regulátoru.

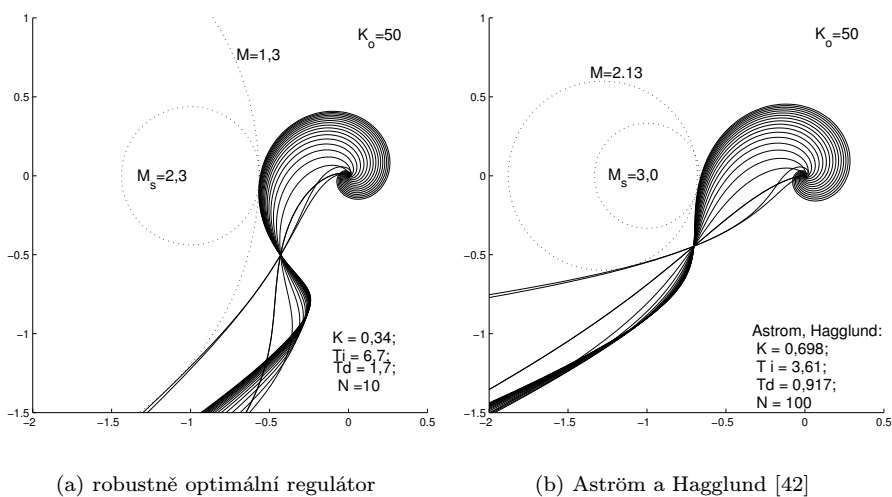
### Porovnání s Aströmovou – Hagglundovou metodou

Na obr. 7.18 jsou zobrazeny všechny kompenzované přenosy odpovídající vrcholům křivouhelníka  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^-}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1; \omega)$ ,  $K_0 = 50$  pro robustně optimální PID regulátor obr. 7.18a a PID regulátor navržený Aströmovou – Hagglundovou me-



Obrázek 7.17: Řešení úlohy ( $PID; S_{\mathbb{R}}^n(K_0, 0; e^{-j\varphi}, 1); M, N$ ) pro  $n = 20$ ,  $\varphi = 180^\circ$ ,  $M = 1, 3$ ,  $N = 10$

todou obr. 7.18b. Odtud je patrné, že Aströмова – Hagglundova metoda vede pro některé přípustné systémy na příliš kmitavou uzavřenou smyčku.



Obrázek 7.18: Kompenzované frekvenční charakteristiky extrémálních přenosů (7.20) pro  $K_0 = 50$  PID regulátorem

## Kapitola 8

# Závěr

Práce se zabývá novým (interpolačním) přístupem k návrhu robustních regulátorů, který je motivován populárními inženýrskými metodami seřizování jednoduchých průmyslových regulátorů. Tento přístup vychází z dobře známé skutečnosti, že v reálném experimentu můžeme získat buď větší počet parametrů (složitějšího modelu) s menší přesností nebo méně parametrů (jednoduššího modelu) s větší přesností. Uvedený přístup dává stejně jako inženýrské metody přednost odhadu co možná nejmenšího počtu tzv. charakteristických čísel procesu, která reprezentují minimální informaci nutnou pro návrh vyhovujícího regulátoru daného typu. Od inženýrských metod se však zásadně odlišuje tím, že empirické poznatky nahrazuje řešením exaktně formulované úlohy robustního návrhu regulátoru pro množinový model procesu, který je definován jako množina apriorně přípustných systémů s danými charakteristickými čísly. Tímto způsobem lze nalézt modifikované verze inženýrských metod, které si ponechávají svoji jednoduchost, avšak jsou již teoreticky podloženy a mají přesně vymezený okruh aplikovatelnosti. Nový přístup byl v této práci použit k podrobné analýze a revizi známé ZNF metody, která je velmi často užívaná v současných PID – autotunerech. Obdržené výsledky lze stručně shrnout následovně:

1. Bylo ukázáno, že původní ZNF metoda je velmi nespolehlivá a může dokonce vést i v případě rozumných systémů na nestabilní uzavřenou smyčku.
2. Byla nalezena nová, za daných předpokladů nikdy neselhávající modifikace ZNF metody, která stejně jako původní metoda vychází ze znalosti pouze jednoho bodu frekvenční charakteristiky řízeného systému (tedy ze dvou charakteristických čísel). Fázové zpoždění tohoto chytře vybraného bodu je však na rozdíl od ZNF metody podstatně menší než  $180^\circ$ , a navíc silně závisí na navrhovaném typu regulátoru a požadavku na bezpečnost ve stabilitě uzavřené smyčky. Odtud plyne, že v identifikačním experimentu musí být odhadnut bod s právě požadovaným fázovým zpožděním. To lze například provést reléovým experimentem, kde je do smyčky zařazen vhodný „fázovací“ filtr nebo je užit reléový regulátor s „adaptivní“ hysterezí. Poznamenejme, že naznačeným způsobem navržený autotuner byl již úspěšně ověřen v průmyslových podmínkách.
3. Exaktním způsobem bylo nalezeno zobecnění ZNF metody vycházející ze

znalosti dvou bodů frekvenční charakteristiky řízeného systému. Konkrétně je zde řešen pouze případ, kdy znalost kritického bodu je doplněna znalostí statického zesílení procesu (tedy případ tří charakteristických čísel), avšak zde rozvinutý matematický aparát umožňuje stejně snadno řešit i obecný případ. Uvedené zobecnění, které je možné též považovat za zpřesnění empirických výsledků uvedených v [41] a [28], je vhodné pro přesnější autotunery. Poznamenejme však, že odhad statického zesílení vyžaduje časově podstatně náročnější experiment.

Výsledky uvedené v této práci lze zobecnit v několika směrech. Uvedme alespoň dva z nich:

1. *Rozšíření třídy apriorně přípustných systémů.* Zdá se, že například velké komplikace nezpůsobí, připustíme-li přenosy s jednou nulou a reálnými stabilními póly. Přijatelné pravděpodobně budou i přenosy vzniklé sériovým řazením integračních článků a stabilních přenosů prvního řádu. Podstatně obtížnější situace nastane, připustíme-li komplexní póly ležící v určitém sektoru komplexní roviny (viz kap. 3), neboť potom jsou extrémální přenosy závislé na frekvenci.

2. *Užití jiných charakteristických čísel procesu.* Lze například ukázat, že je možné vybudovat analogickou teorii množinového modelu v časové oblasti, kdy charakteristická čísla jsou jednotlivé body přechodové charakteristiky. Charakterizace příslušné reprezentativní podmnožiny za stejných apriorních předpokladů již byla autorem provedena a je jen o málo složitější než ve zde uvedeném frekvenčním případě.

Hlavní cíl projektu, kterého je tato práce součástí, je realizace spolehlivého autotuneru pro všechny typy standardních průmyslových regulátorů.

# Literatura

- [1] Ziegler, J. G. – Nichols, N. B.: Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME, 1942, 64, 759-768
- [2] Hang, C.C. – Aström, K.J. – Ho, W.K.: Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula. IEE Proceedings-D, Vol. 138, No.2, 1991, 111-118.
- [3] Vandoren, V.J.: Inside Self – Tuning PID controllers. Control Engineering, Aug 1993, 67-70.
- [4] Aström, K.J. – Hagglund, T.: Automatic tuning of simple regulators with specification on phase and amplitude margins. Automatica, 1984, 20, 645-651.
- [5] Hagglund, T. – Aström, K.J.: Automatic tuning of PID controllers based on dominant pole design. Proc. IFAC Workshop on Adaptive Control Of Chemical Process, Frankfurt, FRG, 1985.
- [6] Rotač, V. : Avtomatizacija nastrojki sistem upravljenja. Moskva, Energoatomizdat, 1984.
- [7] Aström, K.J. – Hang, C.C. – Person, P. – Ho, W.K.: Towards Intelligent PID Control. Automatica, 28, 1, 1992, 1-9.
- [8] Smith, O.J.M.: Feedback Control Systems. New York, McGraw - Hill, 1958.
- [9] Schlegel, M. – Chladová, K.: Regulátor Smithova typu - regulátor pro obtížně regulovatelné systémy. Automatizace, 38(1995), č. 12, s.471-477.
- [10] Tang, Y. – Ortega, R.: Adaptive tuning to frequency response specification. Automatica, 29, 1993, pp.1557-1563.
- [11] Hagglund, T. – Aström, K.J.: An industrial adaptive PID controller. IFAC Symposium on adaptive systems in control and signal processing, 1989, Glasgow, UK.
- [12] Hagglund, T. – Aström, K.J.: A frequency domain approach to analysis and design of simple feedback loops. Proceedings 23rd IEEE Conference on decision and control, 1984, Las Vegas.
- [13] Schlegel, M. – Balda, P. – Jančík, J. – Odvárko, B.: Robust design of simple controllers: Method and PC-program. XI.IFAC World Congress, 1990, Tallin.



- [14] Bode, H.W.: Network analysis and feedback amplifier design. 1945, New York: Van Nostrand.
- [15] Wolovich, W.A.: Automatic control systems. Saunders college publishing, 1994, New York.
- [16] Kwakernaak, H.: Robust control and  $H_\infty$  - optimization - tutorial paper. Automatica, 29, 1993, pp.255-273.
- [17] Doyle, J.C. – Stein, G.: Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control. AC-26, 1981, pp. 4-16.
- [18] Schlegel, M.: Návrh a nastavování průmyslových regulátorů - teorie pro praxi. Automatizace. 40, 1997, č. 11, s.711-719.
- [19] Bristol, E.H.(1977): Pattern recognition: An alternative to parameter identification in adaptive control. Automatica, 13, pp. 197-202.
- [20] Callaghan, P.J. – Lee, P.L. – Newell R.B.(1986): Evaluation of foxboro controller. Process Control Engineering, May, pp. 38-40.
- [21] Cohen, G.H. – Coon, G.A.(1953): Theoretical consideration of retarded control. Trans. ASME, 75, pp.827-834.
- [22] Gawthrop, P.J.(1986): Self-tuning PID controllers: Algorithms and implementation. IEEE Transactions on Automatic Control, 31, pp.201-209.
- [23] Hägglund, T. – Aström, K.J.(1991): Industrial adaptive controllers based on frequency response techniques. Automatica, 27, pp. 599-609.
- [24] Hang, C.C. – Sin, K.K.(1991): An online auto-tuning method based on crosscorrelation. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 38:6. pp. 428-437.
- [25] Ho, W.K. – Hang, C.C. – Cao, L.S.(1992): Tuning of PI controllers based on gain and phase margin specifications. In Preprints IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics, P.R. China.
- [26] Kraus, T.W. – Myron, T.J.(1984): Selftuning PID controller uses pattern recognition approach. Control Engineering, June, pp. 106-111.
- [27] Marsik, J. – Strejc, V.(1989): Application of identification-free algorithms for adaptive control. Automatica, 25, pp. 273-277.
- [28] Nishikawa, Y. – Sannomiya, N. – Ohta, T. – Tanaka, H.(1984): A method for autotuning of PID control parameters. Automatica, 20, pp. 321-332.
- [29] Aström, K.J. – Hägglund, T.: PID Controllers: Theory, Design and Tuning. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, second edition, 1995.
- [30] Aström, K.J. – Hägglund, T. – Hang, C.C. – Ho, W.K.: Automatic tuning and adaptation for PID controllers - A survey. Control Engineering Practice, 1:4, pp. 699-714, 1993.

- [31] Wolovich, W.A.: Automatic Control Systems. Saunders College Publishing, New York, 1994.
- [32] Barmish, B.R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.
- [33] Kobra, J.: Interpolace–vývoj formulace problému a jeho řešení. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 44,4, 1999.
- [34] Pick, G.: Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. Math. Annalen 77, 7-23. (1916).
- [35] Walsh, J.H.: Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. AMS Colloquium Publications, 1960.
- [36] Jarník, V.: Diferenciální počet. Academia, Praha, 1984.
- [37] PID Self-Tuner. User Manual. Siemens AG, 1997.
- [38] Åström, K.J. – Panagopoulos, H. – Hägglund, T.: Design of PI controllers based on non-convex optimization. Automatica, Vol.34, No.5, pp. 585-601, 1998.
- [39] Lundh, M. – Åström, K.J.: Automatic initialization of a robust self-tuning controller. Automatica, Vol.30, No.1, pp. 1649-1662, 1994.
- [40] Schlegel, M.: Nová metoda pro návrh PI(D) regulátoru–teorie pro praxi. Automatizace 41, 2, 1998, str. 70-78.
- [41] Shinskey, F.G. : How good are our controllers in absolute performance and robustness? Measurement Control, Vol. 32, May 1990.
- [42] Åström, K.J. – Hägglund, T.: New tuning methods for PID controllers. Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy, September 1995.
- [43] Hang, C.C. – Åström, K.J. – Ho, W.K.: Refinements of the Ziegler–Nichols tuning formulae. IEE Proceedings–D, Vol. 138, No.2, March 1991.
- [44] Ninness, B. – Goodwin, G.C.: Estimation of model quality. Automatica, Vol.31, 12, pp. 1771-1797, 1995.
- [45] Rivera, D.E. – Moravi, M. – Skogestad, S.: Internal model control. 4. PID Controller Design. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Vol. 25, No.1, 1986.
- [46] Rudin, W.: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia Praha 1977.