

# Modální řízení konečněrozměrných lineárních systémů

Miloš SCHLEGEL

Plzeň 2005

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Přípravná kapitola</b>	<b>6</b>
2.1	Seznam označení . . . . .	6
2.2	Invariantní polynomy . . . . .	7
2.3	Řiditelnost a pozorovatelnost . . . . .	7
2.4	Indexy řiditelnosti a kanonická forma řiditelnosti . . . . .	8
2.5	Generické vlastnosti . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Sylvesterova maticová rovnice</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Explicitní vztahy pro modální řízení</b>	<b>18</b>
4.1	Bass - Guarův vztah [9] . . . . .	18
4.2	Ackermannův vztah [10] . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Základní úloha modálního řízení</b>	<b>21</b>
5.1	Parametrizace $\mathcal{F}(A, B, L)$ pomocí mn parametrů . . . . .	22
5.2	Rosenbrockova věta . . . . .	23
5.3	Parametrizace $\mathcal{F}(A, B, L)$ pomocí minimálního počtu parametrů . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Neúplné modální přiřazení stavovou zpětnou vazbou</b>	<b>39</b>
6.1	Formulace problému . . . . .	39
6.2	Parametrizace $\mathcal{F}_s(A, B, L)$ . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Parametrizace regulátorů konečného počtu kroků</b>	<b>45</b>
7.1	Explicitní tvar parametrické matice . . . . .	46
7.2	Regulátor minimálního počtu kroků . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Neúplné modální přiřazení výstupní zpětnou vazbou</b>	<b>55</b>
<b>9</b>	<b>Úplné přiřazení pólů výstupní zpětnou vazbou</b>	<b>62</b>
<b>10</b>	<b>Přiřazení pólů pomocí dynamického kompenzátoru</b>	<b>68</b>
<b>11</b>	<b>Numerické algoritmy</b>	<b>72</b>
11.1	Podmíněnost řešení Sylvesterovy rovnice . . . . .	72
11.2	Numerické řešení Sylvesterovy rovnice . . . . .	74
11.2.1	Bartels–Stewartův algoritmus [46] . . . . .	75
11.2.2	Hessenberg–Schurův algoritmus [47] . . . . .	76
11.2.3	Leverier–Faddějevův algoritmus . . . . .	76
11.3	Výpočet zpětné vazby . . . . .	78

<b>12 Praktické příklady</b>	<b>80</b>
12.1 Přímá regulace výstupního tahu válcovaného pásu v případě desetiválcové stolice ŠKODA 2xC3–1200 . . . . .	80
12.2 Řízení teplotního procesu . . . . .	84
12.3 Řízení navíjecího soustrojí . . . . .	86
<b>13 Závěr</b>	<b>89</b>
<b>A Příloha</b>	<b>94</b>
<b>B Příloha</b>	<b>95</b>

# 1 Úvod

Rozmístění pólů uzavřeného systému v libovolné předem zadané body komplexní roviny a různá zobecnění a modifikace této úlohy tvoří intenzivně se rozvíjející předmět teorie automatického řízení nazývaný často *modální řízení*. Výskyt termínu “modální řízení” je možno objasnit tím, že pólům odpovídají příslušné vlastní volné pohyby systému, které se často nazývají *módy*.

Úloha modálního řízení je často považována za vůbec základní problém teorie lineárních systémů. V té či oné podobě se skutečně vyskytovala a vyskytuje téměř ve všech algoritmech syntézy řídicích systémů. Pro její těsný vztah s fyzikálně názornými pojmy jako vlastní frekvence, časová konstanta, tlumení, rychlost odezvy a podobně je velmi populární v praxi. Modální řízení můžeme chápat jako dalekosáhlé zobecnění techniky geometrického místa kořenů.

Přes velký počet prací o modálním řízení zůstávají mnohé problémy otevřené a nejsou k dispozici ani skutečně spolehlivé a univerzální numerické algoritmy poskytující úplná řešení příslušných modálních úloh.

V této práci budeme předpokládat, že zkoumaný systém je popsán stavovým modelem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.2)$$

kde  $\dot{x}$  značí  $\dot{x}(t)$  pro spojitý systém a  $x(t+1)$  pro diskrétní systém,  $x(t)$  je  $n$ -rozměrný stavový vektor,  $u(t)$  je  $m$ -rozměrný stavový vektor řízení a  $A, B, C$  jsou konstantní reálné matice příslušných rozměrů. Systém popsáný rovnicí (1.1) budeme zkráceně označovat dvojicí  $(A, B)$ , podobně trojice  $(C, A, B)$  bude označovat systém daný rovnicemi (1.1) a (1.2).

Pod úlohou modálního řízení systému  $(C, A, B)$  budeme v této práci rozumět přiřazení spektrálních vlastností matici dynamiky uzavřeného systému pomocí *stavové zpětné vazby*  $u(t) = Fx(t)$  anebo pomocí *výstupní zpětné vazby*  $u(t) = Ky(t)$ . Budeme rozlišovat úplné a částečné přiřazení. Pod úplným přiřazením budeme rozumět přiřazení zvolené Jordanovy kanonické formy matici dynamiky uzavřeného systému, pod částečným přiřazením budeme rozumět též přiřazení zvolené Jordanovy formy, avšak pouze pro některý invariantní podprostor matice dynamiky uzavřeného systému. Poznamenejme, že takto formulovaná úloha je dostatečně obecná a zahrnuje všechny standardní úlohy modálního řízení včetně modálního řízení pomocí dynamické zpětné vazby. Dříve než přistoupíme k podrobnějšímu vysvětlení cílů této práce, provedme si krátkou historickou exkurzi. (Podrobný přehled prací o modálním řízení je uveden v [1]).

Jednou z prvních aplikací metody stavového prostoru bylo právě užití stavové zpětné vazby k přemístění vlastních čísel matice dynamiky lineár-

ního systému. Bertram [2], (1959) byl pravděpodobně první, který si uvědomil, že jestliže je systém s jedním vstupem *řiditelný*, potom lze dosáhnout libovolného rozmístění pólů systému pomocí stavové zpětné vazby. Úplný důkaz tohoto tvrzení podal v málo známém článku Rissanen [3], (1960). Obdobný výsledek pro systémy s více vstupy dokázali nezávisle Popov [4], (1964), Luenberger [5], (1966) a Wonham [6], (1967). Přibližně v této době nastal také velký pokrok v teorii kanonických forem [7], [8]. Objevily se také jednoduché explicitní vztahy pro výpočet stavové zpětné vazby realizující dané rozmístění pólů, viz. například [9], [10].

Pomocí těchto výsledků je možné libovolné přiřazení pólů pro vícerozměrové systémy i v případě, kdy není k dispozici celý stav systému. V takovéto situaci se zdálo, že problém modálního řízení je zcela vyřešen <sup>1</sup>. Podobné úvahy však nebyly opodstatněné přinejmenším z následujících důvodů:

1. Existenční teorie se omezovala výhradně na přiřazení pólů tj. charakteristického polynomu a opomíjela přiřazení hlubších spektrálních vlastností takových, jako jsou invariantní polynomy, vlastní a zobecněné vlastní vektory atd.
2. Téměř úplně neřešené zůstaly problémy přiřazení pólů pomocí výstupní (tj. neúplné) zpětné vazby, pomocí výstupní dynamické zpětné vazby kompenzátorového typu a pomocí zpětné vazby s omezením na strukturu nenulových prvků (tj. například decentralizovaná zpětná vazba). Poznamenejme, že jsou to případy zvláště důležité pro praktické užití.
3. Pravděpodobně hlavním nedostatkem však bylo omezení na případ jednotkové hodnoty zpětnovazební matice. Tento omezující předpoklad byl zaváděn ze dvou důvodů. Za prvé existenční důkazy konstruovaly příslušnou zpětnou vazbu tak, že nejprve převedly systém s více vstupy na říditelný systém s jedním vstupem a pro ten pak řešily úlohu přiřazení pólů. Za druhé, při jednotkové hodnotě zpětné vazby je příslušná úloha lineární a má jediné řešení. Bez tohoto předpokladu jde obecně o nelineární úlohu s nekonečně mnoha řešeními.

Tyto neřešené, pro praxi velmi důležité problémy, vyvolaly velkou explozi publikací v sedmdesátých letech trvající však i v současné době. Uvedme tři velice často citované práce, které se objevily na jejím samém počátku. Rosenbrock [11], (1970) našel nutnou a postačující podmínku pro přiřazení invariantních polynomů pomocí stavové zpětné vazby. Tato podmínka má formu soustavy nerovností, v níž vystupují indexy říditelnosti systému a stupně přiřazovaných invariantních polynomů.

Poznamenejme, že přiřazení invariantních polynomů je ekvivalentní s přiřazením Jordanovy kanonické formy. Brash a Person [12], (1970) ukázali, že

---

<sup>1</sup>Zde máme na mysli případ konečněrozměrných systémů.

pro říditelný a pozorovatelný systém existuje dynamický kompenzátor přiřazující libovolným způsobem všechny póly uzavřeného systému, přičemž řád tohoto kompenzátoru nemusí být větší než  $\min(\mu - 1, \nu - 1)$ , kde  $\mu$  a  $\nu$  jsou po řadě index říditelnosti a index pozorovatelnosti systému. Davidson [13], (1970) dokázal, že pro říditelný a pozorovatelný systém s  $p$  lineárně nezávislými skalárními výstupy existuje výstupní zpětná vazba přiřazující s libovolnou přesností  $p$  libovolně zvolených pólů uzavřeného systému.

V nedávné době bylo dosaženo mnoho dalších pozoruhodných výsledků. Zde se zmíníme o těch nejdůležitějších, majících navíc těsný vztah k obsahu následujících kapitol. Moore [14], (1976) a Klein a Moore [15], (1977) zkoumali problém současného přiřazení pólů (vlastních čísel) a vlastních vektorů (popřípadě zobecněných vlastních vektorů). Ukázali, že má-li tato úloha řešení, potom existuje právě jedno řešení. Tedy volnost ve výběru stavové zpětné vazby přiřazující dané póly spočívá ve volnosti výběru vlastních vektorů. Bohužel tyto vektory nelze volit libovolně, ale pouze z určitých podprostorů matice dynamiky uzavřeného systému. V citovaných člancích je uveden způsob, jak parametrizovat výběr vlastních vektorů (a tedy tím i výběr příslušné zpětné vazby) pomocí  $r$  parametrů, kde  $r = mn$  je počet všech prvků zpětnovazební matice. Tato parametrizace však obsahuje na první pohled zbytečně velký počet návrhových parametrů, neboť počet stupňů volnosti ve výběru zpětnovazební matice je zřejmě podstatně menší než  $r$ . Přesto je tato parametrizace často využívána, požaduje-li se kromě přiřazení pólů splnění dalších požadavků na uzavřený systém, například optimalita vzhledem k některému funkcionálu, robustnost uzavřeného systému vzhledem k stabilitě, tvar přechodových charakteristik, eliminace poruchy atd. V této souvislosti upozorníme z velkého počtu prací alespoň na [16].

Jiný problém modálního řízení, ve kterém došlo v poslední době ke značnému pokroku, je přiřazení pólů pomocí výstupní zpětné vazby. Uvažujme říditelný a pozorovatelný systém  $n$ -tého řádu s  $m$  vstupy a  $p$  výstupy, potom zpětná vazba od výstupu je reprezentována  $mp$  zesíleními. Odtud plyne, že  $mp \geq n$  je nutná podmínka pro libovolné rozmístění všech  $n$  pólů uzavřeného systému. Bohužel tato podmínka není postačující. Například pro “velmi mnoho” systémů 4. řádu s dvěma vstupy a dvěma výstupy neexistuje řešení problému libovolného přiřazení pólů pomocí reálné výstupní zpětné vazby [17], (1978).

Kimura [18], (1975) však ukázal, že jestliže  $m + p - 1 \geq n$ , tj. jestliže součet počtu vstupů a výstupů je větší než řád systému, potom existuje výstupní zpětná vazba přiřazující s libovolnou přesností všech  $n$  pólů uzavřeného systému. Podobné výsledky byly nezávisle odvozeny též v [19], [20].

Na speciální úlohu modálního řízení vede syntéza časově optimálního regulátoru diskrétního systému. Zde požadavek minimálního počtu kroků regulace vede k požadavku, aby matice dynamiky uzavřeného systému byla podobná nilpotentní matici se speciální strukturou. Práce zabývající se touto úlohou jsou například [21], [22] a [23].

Praktické požadavky syntézy vedou často na úlohu modálního řízení s omezením na strukturu zpětné vazby. Speciálním případem je například decentralizovaná zpětná vazba. Zde hrají velkou roli takzvané pevné neboli fixní módy, které mají podobný význam jako neřiditelné nebo nepozorovatelné módy v případě nedecentralizované zpětné vazby. Pevné módy jsou ty póly, které jsou invariantní vůči všem decentralizovaným zpětným vazbám. Jejich význam pro stabilizaci a přiřazení pólů je zkoumán například v [24] a [25].

V předkládané práci je uveden nový obecný a jednotný přístup k problematice modálního řízení. Jeho teoretický základ tvoří poznatky o Sylvesterově maticové rovnici [26], (1884). Numerické řešení této rovnice je současně hlavním krokem všech v práci navržených algoritmů modálního řízení. Základní zde řešená úloha modálního řízení je následující:

Je dán říditelný systém  $(A, B)$ , najděte všechny stavové zpětné vazby  $F$  takové, že matice dynamiky uzavřeného systému  $A+BF$  je podobná předem zadané matici  $L$ . Parametrizujte množinu všech takových zpětných vazeb pomocí *minimálního* počtu návrhových parametrů. Navrhněte kvalitní algoritmus vyčíslení zpětnovazební matice pro daný výběr hodnot návrhových parametrů.

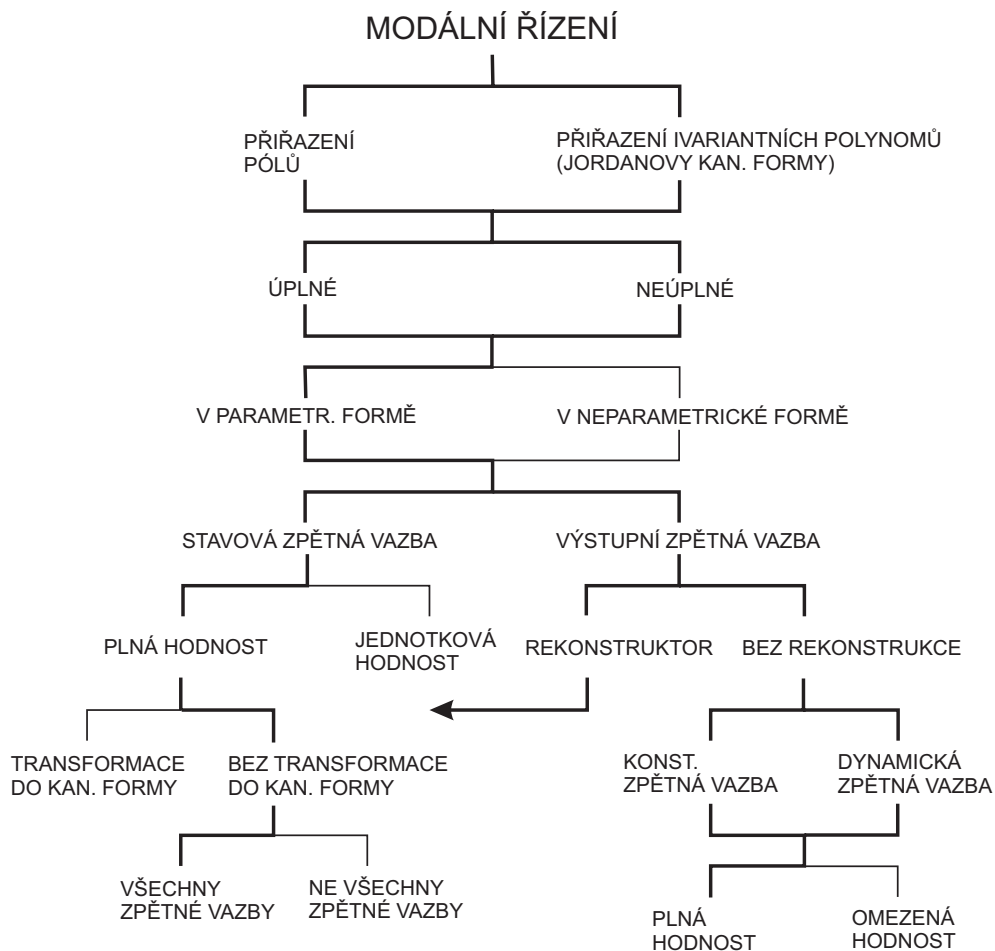
Řešení takto postavené úlohy umožňuje vybírat z množiny všech zpětných vazeb, realizujících dané modální přiřazení, ty zpětné vazby, které vyhovují dalším speciálním požadavkům. Tento výběr může být proveden například pomocí parametrické optimalizace, a proto je velmi důležité znát explicitní parametrizaci množiny zpětných vazeb pomocí minimálního počtu návrhových parametrů. Dále jsou v práci zkoumány různé modifikace předchozí úlohy, umožňující řešit prakticky všechny základní problémy modálního řízení. Vždy je zdůrazňována snaha získat všechna řešení v parametrické formě s minimálním počtem návrhových parametrů. Na obr. 1.1 je uveden pokus o klasifikaci metod a přístupů v modálním řízení. Silně vytažené hrany vyznačují oblasti řešené v této práci.

Hlavní nové teoretické výsledky této práce jsou:

- explicitní tvar řešení Sylvesterovy maticové rovnice a jeho systémově teoretické důsledky
- parametrizace všech stavových zpětných vazeb přiřazujících zadanou Jordanovu formu pomocí minimálního počtu návrhových parametrů a její modifikace pro částečně modální přiřazení a pro modální přiřazení pomocí výstupní zpětné vazby
- lineární parametrizace všech časově optimálních regulátorů konečného počtu kroků
- numerický algoritmus pro řešení obecné úlohy modálního řízení

Práce dále obsahuje modifikace celé řady dříve známých výsledků, které jsou však dokázány novým jednotným způsobem. Jmenujme například dříve zmíněnou Rosenbrockovu strukturální větu a Davisonovu větu o přiřazení pólů pomocí výstupní zpětné vazby.

Hlavní vytyčený cíl celé práce je však zpřístupnit četné a hluboké výsledky teorie modálního řízení pro běžné praktické užití. Pro splnění tohoto cíle má zásadní význam vybudování programového systému pro modální řízení. Ukázky použití takového systému jsou uvedeny v poslední kapitole této práce.



obr. 1.1



## 2 Přípravná kapitola

V této kapitole ve stručné formě shrneme základní označení definice a připomeneme některé méně známé věty lineární algebry a lineární teorie řízení, které budou potřebné v následujících kapitolách.

### 2.1 Seznam označení

//	ukončení důkazu
$\triangleq$	definiční relace
$\emptyset$	prázdná množina
<b>R</b>	množina reálných čísel
<b>C</b>	množina komplexních čísel
<b><math>\Lambda</math></b>	symetrická množina komplexních čísel, tj. množina pro níž platí: $\sigma + i\omega \in \Lambda \rightarrow \sigma - i\omega \in \Lambda$
$p(\lambda)/q(\lambda)$	polynom $q(\lambda)$ je dělitelný (beze zbytku) polynomem $p(\lambda)$
$A \in \mathbf{R}^{n \times m}$	$A$ je reálná matice typu $n \times m$
$I_n$	jednotková matice řádu $n$
$\det A$	determinant matice $A$
$A^{-1}$	inverzní matice k matici $A$
$A^T$	transponovaná matice k matici $A$
$A^P$	zobecněná inverzní matice k matici $A$
$\text{rank } A$	hodnost matice $A$
$\text{Im } A$	$\text{Im } A \triangleq \{x \in \mathbf{R}^n : x = Ay, y \in \mathbf{R}^m\}, A \in \mathbf{R}^{n \times m}$
$\text{Ker } A$	$\text{Ker } A \triangleq \{x \in \mathbf{R}^m : Ax = 0\}, A \in \mathbf{R}^{n \times m}$
$\sigma(A)$	spektrum matice $A$ , tj. množina všech vlastních čísel matice $A$
$A   \chi$	zúžení operátoru reprezentovaného maticí $A$ na invariantní podprostor $\chi$
$[A]_s$	sloupcový zápis matice $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , $[A]_s$ je $n \times m$ rozměrný vektor složený po řadě ze sloupců matice $A$
$\mathcal{Z}(L)$	$\mathcal{Z}(L) \triangleq \{Z \in \mathbf{R}^{s \times s} : ZL = LZ, \det Z \neq 0\}, L \in \mathbf{R}^{s \times s}$
$A \approx B$	matice $A$ je podobná matici $B$ , tj. existuje čtvercová regulární matice $T$ taková, že $A = TBT^{-1}$
$\text{diag} \{L_1, \dots, L_k\}$	blokově diagonální matice s diagonálními bloky $\{L_1, \dots, L_k\}$
$A \otimes B$	tenzorový součin matic $A$ a $B$
$\tau \oplus \varphi$	direktní součet nezávislých lineárních podprostorů $\tau$ a $\varphi$

$$\begin{aligned}
\nu(L) \quad \nu(L) &\triangleq \{\nu_1, \dots, \nu_k\} = \{\nu_i\}_{i=1}^k, \text{ kde } \nu_1, \dots, \nu_k, \\
&\nu_1 \geq \nu_2 \cdots \geq \nu_k, \text{ jsou stupně všech nekonstantních} \\
&\text{invariantních polynomů matice} \\
L &\in \mathbf{R}^{s \times s}, s = \sum_{i=1}^k \nu_i \\
\mu(A, B) \quad \mu(A, B) &\triangleq \{\mu_1, \dots, \mu_m\} = \{\mu_i\}_{i=1}^m, \text{ kde } \mu_1, \dots, \mu_m, \\
&\mu_1 \geq \mu_2 \cdots \geq \mu_m, \text{ jsou indexy řiditelnosti dvojice} \\
&(A, B), A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times m}
\end{aligned}$$

## 2.2 Invariantní polynomy

Spektrální vlastnosti čtvercové matice jsou vyčerpávajícím způsobem popsány buď její Jordanovou kanonickou formou, a nebo pomocí invariantních polynomů této matice. Dvě matice jsou podobné tj. mají až na pořadí Jordanových bloků stejnou Jordanovu kanonickou formu právě tehdy, mají-li stejné invariantní polynomy. Invariantní polynomy lze definovat pomocí následující věty (viz. např. [27]):

**Věta 2.1** *Nechť  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ , potom existuje regulární matice  $T$  taková, že platí:*

$$(i) \quad TLT^{-1} = \text{diag}\{L_1, \dots, L_k\}, \quad (2.1)$$

$$\text{kde } L_i \in \mathbf{R}^{\nu_i \times \nu_i}, \nu_1 \geq \nu_2 \cdots \geq \nu_k, \sum_{i=1}^k \nu_i = s$$

- (ii) *matice  $L_i, 1, 2, \dots, k$ , v (2.1) jsou cyklické, tj. jejich minimální polynom je roven jejich charakteristickému polynomu*
- (iii) *jestliže  $a_i(\lambda)$  je minimální polynom  $L_i, i = 1, 2, \dots, k$ , potom  $a_i(\lambda)$  je minimální polynom matice  $L$  a platí  $a_2/a_1, a_3/a_2, \dots, a_k/a_{k-1}$*
- (iv) *pro matici  $L$  existuje právě jedno  $k$  a právě jedna posloupnost polynomů  $a_1, a_2, \dots, a_k$  taková, že platí (i) - (iii)*

Číslo  $k$  a polynomy  $a_1, a_2, \dots, a_k$  z věty 2.1 budeme nazývat po řadě *index cykličnosti* matice  $L$  a (*nekonstantní*) *invariantní polynomy* matice  $L$ . Skutečnost, že matice  $L$  má invariantní polynomy, jejichž stupně jsou  $\nu_1, \dots, \nu_k, \nu_1 \geq \nu_2 \cdots \geq \nu_k$ , budeme zapisovat takto:  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=k}^k$ .

## 2.3 Řiditelnost a pozorovatelnost

Spojité systém

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.2)$$

kde  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}^m$  a  $A, B$  jsou reálné matice, nazýváme *řiditelný*, jestliže existuje řízení  $u(t)$ , které převádí libovolný počáteční stav  $x(t_0)$  do libovolného konečného stavu  $x(t_1)$  za libovolný časový úsek  $t_1 - t_0 > 0$ . V opačném případě nazýváme systém (2.2) *neřiditelný*.

Podobně diskrétní systém

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.3)$$

nazýváme *řiditelný*, jestliže existuje konečná posloupnost řídicích vektorů  $u_0, u_1, \dots, u_q$ , která převede systém z počátečního stavu  $x_0 = 0$  do libovolného konečného stavu  $x_q$ . V opačném případě nazýváme systém (2.3) *neřiditelný*.

Při takto zavedené definici řiditelnosti spojitého a diskrétního systému platí: Spojitý systém (2.2) je řiditelný právě tehdy, jestliže je řiditelný diskrétní systém (2.3). Z tohoto důvodu nebudeme dále hovořit o řiditelnosti systému (2.2) anebo systému (2.3), ale o řiditelnosti dvojice  $(A, B)$ . Platí následující věta ([29]):

**Věta 2.2** *Následující tvrzení o dvojici  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  jsou ekvivalentní:*

- (i) *dvojice  $(A, B)$  je řiditelná*
- (ii)  *$\text{rank} [B, AB, \dots, A_{n-1}B] = n$*
- (iii)  *$\text{rank} [sI - AB] = n$ , pro všechny  $s \in \mathbf{C}$*

Vlastní číslo  $\lambda$  matice  $A$  nazýváme *řiditelné*, jestliže  $\text{rank} [\lambda I - A, B] = n$ ; v opačném případě říkáme, že  $\lambda$  je *neřiditelné* vlastní číslo.

## 2.4 Indexy řiditelnosti a kanonická forma řiditelnosti

Uvažujme množinu  $\varphi$  všech dvojic  $(A, B) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times m}$ , které splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} \text{rank } B &= m \\ \text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] &= n \end{aligned}$$

Pro dvojici  $(A, B) \in \varphi$ ,  $B \triangleq [b_1, b_2, \dots, b_m]$  utvoříme posloupnost vektorů

$$b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, A^2b_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m$$

V této posloupnosti postupujeme zleva doprava a vyškrtáváme každý vektor, který je lineárně závislý na předchozích vektorech této posloupnosti. Po ukončení tohoto procesu a po příslušném přerovnání a případném přečíslování sloupců  $b_1, \dots, b_m$  matice  $B$  obdržíme posloupnost

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{\mu_2-1}b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{\mu_m-1}b_m,$$



budeme nazývat *algebraickou varietou* nebo jen *varietou* v  $\mathbf{R}^N$ . Varietu  $\vartheta$  budeme nazývat *vlastní (netriviální)*, jestliže  $\vartheta \neq \mathbf{R}^N$  ( $\vartheta \neq \emptyset$ ). Někakou vlastnost  $\pi$ , o které můžeme říci, zda platí anebo neplatí v závislosti na vektorovém parametru  $\alpha \in \mathbf{R}^N$ , můžeme interpretovat jako funkci  $\pi$  zobrazující prostor  $\mathbf{R}^N$  do množiny  $\{0, 1\}$ . Přičemž případ  $\pi(\alpha) = 0$  značí, že neplatí. Vlastnost  $\pi$  je generická na parametrickém prostoru  $\mathbf{R}^N$ , jestliže existuje vlastní varieta  $\vartheta \subset \mathbf{R}^N$  taková, že  $\pi(\alpha) = 0$  implikuje  $\alpha \in \vartheta$ . Jinými slovy:  $\pi$  je generická, jestliže neplatí maximálně na některé vlastní varietě parametrického prostoru. Poněvadž každá vlastní varieta je množina míry nula (v  $\mathbf{R}^N$ ), je zřejmé, že zvolíme-li náhodně parametr  $\alpha$ , je s pravděpodobností jedna  $\pi(\alpha) = 1$ . Pro zjednodušení budeme někdy místo “ $\pi$  je generická na  $\mathbf{R}^N$ ” jednoduše říkat “ $\pi$  platí pro skoro každé  $\alpha \in \mathbf{R}^N$ ”.

**Příklad 2.1** Vlastnost, že matice  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je regulární, je generická vlastnost v prostoru  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , neboť  $\det A$  je polynom v prvcích  $a_{ij}$  matice  $A$  a varieta definovaná vztahem

$$\vartheta = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} : \det A = 0\}$$

je vlastní varieta v prostoru  $\mathbf{R}^{n \times n}$ .

Podrobnější informace lze nalézt například v [29].

### 3 Sylvesterova maticová rovnice

V této kapitole se budeme podrobně zabývat Sylvesterovou maticovou rovnicí. Uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení; odvodíme explicitní tvar řešení a uvedeme některé systémově teoretické důsledky. Obsah této kapitoly podstatným způsobem použijeme později při řešení problémů modálního řízení. Kapitola má především přípravný charakter, avšak vedle známých tvrzení obsahuje též původní výsledky (věta 3.6 a její důsledky).

Sylvesterova rovnice je maticová rovnice ve tvaru

$$AX - XL + R = 0, \quad (3.1)$$

kde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ,  $R \in \mathbf{R}^{n \times s}$  jsou zadané matice a  $X \in \mathbf{R}^{n \times s}$  je neznámá matice. Poznamenejme, že například Ljapunova rovnice užívaná při vyšetřování stability lineárních systémů je speciálním případem (3.1). Pro nás však bude užitečná jiná motivační představa.

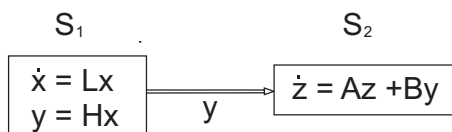
Uvažujme systém  $S_1$

$$S_1 : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Lx, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Hx \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ , který řídí systém  $S_2$

$$S_2 : \quad \dot{z} = Az + By, \quad z(0) = z_0, \quad (3.3)$$

kde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ . Uvažovaná situace je znázorněna na obrázku 3.1. O tom, jak stav  $z(t)$  systému  $S_2$  souvisí se stavem  $x(t)$  systému  $S_1$ , vypovídá následující věta, ve které vystupuje maticová rovnice typu (3.1).



obr. 3.1

**Věta 3.1** (Luenberger [8], 1964). *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ , potom*

$$z(t) = Tx(t) + e^{At}(z_0 - Tx_0), \quad (3.4)$$

kde  $T$  je jediné řešení maticové rovnice

$$AT - TL + BH = 0. \quad (3.5)$$

**Důkaz:** Z (3.2) a (3.3) plyne

$$\dot{z} - T\dot{x} = Az + BHx - TLx$$

Dosadíme-li nyní za  $BH$  z (3.5) obdržíme

$$\dot{z} - T\dot{x} = A(z - Tx),$$

a tedy platí (3.4). Za uvedených předpokladů má rovnice (3.5) jediné řešení (jak bude uvedeno dále) a tím je důkaz úplný.//

Uvedená věta tvoří teoretický základ teorie rekonstrukce vypracované Luenbergerem. Ze vztahu (3.4) vyplývá totiž, že stav  $z(t)$  systému  $S_2$  v ustáleném stavu je lineární kombinací  $Tx(t)$  stavu  $S_1$  za předpokladu, že  $A$  je stabilní. Jestliže  $z_0 = Tx_0$ , je dokonce  $z(t) = Tx(t)$  pro libovolné  $t \geq 0$  a systém  $S_2$  se chová tak, jako by obsahoval “dynamiku” systému  $S_1$ . To je základní princip našeho přístupu k modálnímu řízení. Je zřejmé, že v této souvislosti jsou důležité vlastnosti zobrazení reprezentované maticí  $T$ . Dříve než se budeme zabývat těmito otázkami, uvedeme podmínky, za nichž má rovnice (3.1) řešení a podmínky, kdy existuje právě jedno řešení.

**Věta 3.2** [29, str.21] *Maticová rovnice (3.1) má řešení právě tehdy, jestliže matice*

$$\begin{bmatrix} A & R \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad a \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

*jsou podobné.*

**Důkaz:** 1. Nechť (3.1) má řešení  $X$ , potom snadno ověříme, že

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & R \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

2. Nechť

$$M = \begin{bmatrix} A & R \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad a \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

jsou podobné matice. Tedy elementární dělitelné  $M$  jsou právě ty, které dostaneme sjednocením elementárních dělitelů matic  $A$  a  $L$ . Odtud plyne, že podprostor

$$\tau \triangleq \{[x_1, 0]^T \in \mathbf{R}^{n+s} : x_1 \in \mathbf{R}^n\}$$

dekomponuje  $\mathbf{R}^{n+s}$  vzhledem k  $M$ , tj. existuje  $\varphi \subset \mathbf{R}^{n+s}$  takový, že  $M\varphi \subset \varphi$  a  $\tau \oplus \varphi = \mathbf{R}^{n+s}$  viz [27]. Na druhé straně snadno ověříme, že  $\tau$  dekomponuje  $\mathbf{R}^{n+s}$  vzhledem k  $M$  právě tehdy, jestliže existuje  $Q \in \mathbf{R}^{n \times (n+s)}$  takové, že platí

$$QJ = I_n \tag{3.6}$$

$$QM = AQ, \tag{3.7}$$

kde  $J = [I_n 0]^T \in \mathbf{R}^{n+s \times n}$ . Skutečně, položíme  $\varphi = \text{Ker } Q$ , potom pro  $x \in \mathbf{R}^{n+s}$  je

$$x = JQx + (I_{n+s} - JQ)x,$$

poněvadž  $Q(I_{n+s} - JQ)x = 0$  je  $x \in \tau + \varphi$ . Jestliže  $x \in \tau \cap \varphi$  potom  $x = [x_1, 0]^T$ ,  $x_1 \in \mathbf{R}^n$  a  $x_1 = I_n x_1 = QJx_1 = Qx = 0$ . Tedy  $\tau \cap \varphi = 0$ . Konečně  $Qx = 0$  implikuje  $QMx = AQx = 0$ , takže  $M\varphi \subset \varphi$ . Obráceně jestliže  $\tau \oplus \varphi = \mathbf{R}^{n+s}$  a  $A\varphi \subset \varphi$ , potom  $Q$  je projekce  $\tau \oplus \varphi \rightarrow \tau$ .

Z (3.6) a (3.7) ovšem plyne, že

$$\begin{aligned} Q &= [I_n, -X] \\ \text{a} \quad AX - XL + R &= 0. \end{aligned}$$

Tedy (3.1) má řešení.//

**Věta 3.3** [31, str.125] *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ . Pak ke každé matici  $R$  existuje právě jedno řešení  $X$  maticové rovnice (3.1). Toto řešení lze nalézt ze vztahu*

$$(A \otimes I_s - I_n \otimes L^T)[X]_s = [R]_s, \quad (3.8)$$

takže

$$[X]_s = (A \otimes I_s - I_n \otimes L^T)^{-1}[R]_s \quad (3.9)$$

**Důkaz:** Rovnice (3.1) tvoří soustavu lineárních rovnic pro neznámé prvky  $x_{ij}$  matice  $X$ . Pomocí tenzorového součinu matic ji můžeme převést na standardní tvar (3.8). Skutečnost, že matice soustavy (3.8) je regulární, plyne z faktu, že vlastní čísla matice  $(A \otimes I_s - I_n \otimes L^T)$  jsou ve tvaru  $\lambda_i^A - \lambda_j^L$ , kde  $\lambda_i^A \in \sigma(A)$  a  $\lambda_j^L \in \sigma(L)$  viz [31].//

Nyní se budeme zabývat hledáním explicitního vztahu pro řešení maticové rovnice (3.1). Definujme

$$R_i = - \sum_{k=1}^i A^{i-k} R L^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

a necht'

$$p(\lambda) = \lambda^r + p_1 \lambda^{r-1} + \dots + p_{r-1} \lambda + p_r \quad (3.11)$$

je libovolný polynom s reálnými koeficienty.

**Věta 3.4** [32] *Nechť  $X$  je řešením maticové rovnice (3.1), potom je  $X$  též řešením maticové rovnice*

$$p(A)X - Xp(L) = R_r + p_1 R_{r-1} + \dots + p_{r-1} R_1 \quad (3.12)$$

kde  $p(\lambda)$  je polynom daný vztahem (3.11) a  $R_i, i = 1, 2, \dots$  jsou matice definované vztahem (3.10).



**Důkaz:** Nechť  $X$  je řešení (3.1). Užijeme-li (3.1) a (3.10) snadno ověříme, že platí

$$R_i = A^i X - XL^i, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.13)$$

Použitím (3.13) obdržíme

$$\begin{aligned} R_r + p_i R_{r-1} + \dots + p_{r-1} R_1 &= A^r X - XL^r + p_1(A^{r-1}X - XL^{r-1}) + \dots \\ &+ p_{r-1}(AX - XL) = (A^r + p_1 A^{r-1} + \dots + p_{r-1} A)X - X(L^r + p_1 L^{r-1} + \\ &+ \dots + p_{r-1} L) = p(A)X - Xp(L) \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.//

**Věta 3.5** [32] *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ , potom řešení maticové rovnice (3.1) je dáno vztahy*

$$X = -(R_n + p_1 R_{n+1} + \dots + p_{n-1} R_1)(p_A(L))^{-1} \quad (3.14)$$

$$X = (q_L(A))^{-1}(R_s + q_1 R_{s-1} + \dots + q_{s-1} R_1) \quad (3.15)$$

kde  $p_A(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$  a  $q_L(\lambda) = \lambda^s + q_1 \lambda^{s-1} + \dots + q_n$  jsou po řadě charakteristické polynomy matic  $A$  a  $L$  a matice  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  jsou definovány vztahem (3.10).

**Důkaz:** Dokážeme platnost (3.14). Nechť v (3.12) je  $p(\lambda) = p_A(\lambda)$  charakteristický polynom matice  $A$ . Podle Cayley - Hamiltonovy věty je  $p_A(A) = 0$ ; tedy (3.12) přejde na

$$-Xp_A(L) = R_n + p_1 R_{n-1} + \dots + p_{n-1} R_1$$

Poněvadž předpokládáme  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$  je  $p_A(L)$  regulární a tedy

$$X = -(R_n + p_1 R_{n-1} + \dots + p_{n-1} R_1)(p_A(L))^{-1}$$

Vztah (3.15) lze dokázat analogickým způsobem.//

**Poznámka 3.1** Uvažujme případ  $n = s$ . Jestliže  $A$  a  $L$  mají společná vlastní čísla, potom  $p_A(L)$  a  $q_L(A)$  jsou singulární. Z věty 3.4 plyne, že jsou singulární i matice  $R_n + p_1 R_{n-1} + \dots + p_n R_1$  a  $R_s + q_1 R_{s-1} + \dots + q_{s-1} R_1$  za předpokladu, že (3.1) má řešení.

**Poznámka 3.2** Věta 3.5 umožňuje zformulovat finitivní algoritmus řešení Sylvesterovy maticové rovnice obsahující inverzi matice řádu  $\min(n, s)$ . Naproti tomu řešíme-li (3.1) pomocí věty 3.3 je nutné invertovat matici řádu  $ns$ .

Nyní budeme uvažovat případ, kdy  $R = BH$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ , který nastal ve větě 3.1 a má systémovou interpretaci znázorněnou na obrázku 3.1. Následující pro další kapitoly velmi významná věta je jednoduchým důsledkem věty 3.5.

**Věta 3.6** [32] *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ , potom řešení maticové rovnice (3.1) pro  $R = BH$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ , tj. maticové rovnice*

$$AX - XL + BH = 0$$

je dáno vztahy

$$X = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} p_{n-1}I_m & p_{n-2}I_m & \cdots & p_1I_m & I_m \\ p_{n-2}I_m & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ p_1I_m & \ddots & & \mathbf{0} & \\ I_m & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} [p_A(L)]^{-1} \quad (3.16)$$

$$X = [q_L(A)]^{-1} [B, AB, \dots, A^{s-1}B] \begin{bmatrix} q_{s-1}I_m & q_{s-2}I_m & \cdots & q_1I_m & I_m \\ q_{s-2}I_m & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ q_1I_m & \ddots & & \mathbf{0} & \\ I_m & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \\ HL^{s-1} \end{bmatrix} [p_A(L)]^{-1} \quad (3.17)$$

kde  $p_A(\lambda)$ ,  $q_L(\lambda)$  a  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ,  $q_1, q_2, \dots, q_s$  mají stejný význam jako ve větě 3.5.

**Důkaz:** Vztahy (3.16) a (3.17) obdržíme dosazením do (3.14) a (3.15) za  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , podle (3.10), tj.

$$R_i = - \sum_{k=1}^i A^{i-k} BHL^{k-1} \quad (3.18)$$

Naznačíme například odvození (3.17) pro  $s = 3$ . Z (3.18) plyne

$$\begin{aligned} R_1 &= -BH \\ R_2 &= -ABH - BHL \\ R_3 &= -A^2BH - ABHL - BHL^2 \end{aligned}$$

Nyní

$$\begin{aligned} R_3 + q_1R_2 + q_2R_1 &= -B(q_2H + q_1HL + HL^2) - AB(q_1H + HL) - A^2BH = \\ &= -[B, AB, A^2B] \begin{bmatrix} q_2H + q_1HL + HL^2 \\ q_1H + HL \\ H \end{bmatrix} = \\ &= -[B, AB, A^2B] \begin{bmatrix} q_2I_m & q_1I_m & I_m \\ q_1I_m & I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ HL^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tedy podle (3.15) má řešení  $X$  tvar (3.17). //

Nyní zformulujeme několik bezprostředních důsledků předchozí věty v nichž předpokládáme, že  $A$  a  $L$  nemají společná vlastní čísla. Tyto důsledky mají zřejmou interpretaci v situaci znázorněné na obr. 3.1.

**Důsledek 3.1** Nechť  $R = bh^T$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$ ,  $h \in \mathbf{R}^s$ ,  $s \leq n$  a  $(A, b)$  je říditelná dvojice, potom

$$\text{Ker } X = \text{Ker} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{s-1} \end{bmatrix}$$

Jestliže současně  $(A, b)$  je říditelná a  $(h^T, L)$  pozorovatelná dvojice, potom  $X$  má plnou sloupcovou hodnotu.

**Důsledek 3.2** Nechť  $R = bh^T$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$ ,  $h \in \mathbf{R}^s$ ,  $s \geq n$  a  $(A, b)$  je říditelná dvojice, potom

$$\text{Im } X = \text{Im} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$$

Jestliže současně  $(h^T, L)$  je pozorovatelná a  $(A, b)$  říditelná dvojice, potom  $X$  má plnou řádkovou hodnotu.

**Důsledek 3.3** Nechť  $R = bh^T$ ,  $b, h \in \mathbf{R}^n$ ,  $s = n$ ,  $(A, b)$  je říditelná a  $(h^T, L)$  pozorovatelná dvojice, potom  $X$  je regulární.

**Poznámka 3.3** Tvrzení obsažené v důsledku 3.3 bylo jiným způsobem dokázáno již Luenbergerem v [5]. Důsledky 3.1 a 3.2 je možno chápat jako jeho zobecnění.

**Důsledek 3.4** Nechť  $n = s$  a nechť  $X$  je dané vztahem (3.16) nebo (3.17) je regulární, potom dvojice  $(A, B)$  je říditelná a dvojice  $(H, L)$  pozorovatelná.

**Poznámka 3.4** Obrácené tvrzení k důsledku 3.4 není správné. K tomu, aby  $X$  dané vztahem (3.16) (nebo (3.17)) bylo regulární je nutná platnost mnohem hlubších požadavků na dvojice  $(A, B)$  a  $(H, L)$ . Tato otázka bude vyjasněna v kapitole 5.

Uvedme ještě jedno tvrzení, které bude v dalším potřebné.

**Věta 3.7** *Jestliže existuje symetrické řešení  $X$  maticové rovnice*

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \tag{3.19}$$

*a  $(A, B)$  je říditelná dvojice, potom  $X$  je regulární.*

**Důkaz:** Necht'  $X$  je řešení maticové rovnice (3.19) a předpokládejme, že je singularní. Tedy existuje  $y_0 \in Ker X$ ,  $y_0 \neq 0$ . Potom postupně platí (užijeme faktu, že  $X^T = X$ ).

$$\underbrace{AXy_0}_{=0} + XA^T y_0 + BB^T y_0 = 0 \quad (3.20)$$

$$XA^T y_0 + BB^T y_0 = 0 \quad (3.21)$$

$$\underbrace{y_0^T XA^T y_0}_{=0} + y_0^T BB^T y_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$B^T y_0 = 0 \quad (3.23)$$

Tedy z (3.23) plyne  $y_0^T \in Ker B^T$  a z (3.21) plyne  $A^T y_0 \in Ker X$ . Napíšeme-li nyní (3.20 - 3.23) a nahradíme-li při tom  $y_0$  vektorem  $A^T y_0$  dostaneme  $A^T y_0 \in Ker B^T$  a  $(A^2)^T y_0 \in Ker X$ . Pokračujeme-li dále obdobným způsobem, zjistíme, že

$$(A^T)^i y_0 \in Ker B^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

neboli

$$y_0^T [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0$$

Tedy  $(A, B)$  není říditelná dvojice. To však je spor s předpokladem.//

## 4 Explicitní vztahy pro modální řízení

Naším cílem v této kapitole bude jednoduché odvození dvou známých vztahů pro výpočet stavové zpětné vazby přiřazující dané rozmístění pólů pomocí explicitního řešení Sylvesterovy maticové rovnice. Zde uvedený přístup bude využit v následujících kapitolách k získání obecnějších původních výsledků. V tomto smyslu je tato kapitola úvodní.

### 4.1 Bass - Guarův vztah [9]

Uvažujme říditelný systém  $(A, b)$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$  s charakteristickým polynomem

$$p(s) = \det(sI - A) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n. \quad (4.1)$$

Přejeme si modifikovat dynamické chování daného systému stavovou zpětnou vazbou tak, aby charakteristický polynom uzavřeného systému byl řekněme

$$q(s) = \det(sI - A - bf^T) = s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_n. \quad (4.2)$$

Náš přístup spočívá ve využití explicitního řešení vhodné Sylvesterovy maticové rovnice. Uvažujme maticovou rovnici

$$AX - XL + bh^T = 0, \quad (4.3)$$

kde  $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$  a  $h \in \mathbf{R}^n$  jsou takové, že jsou splněny následující dvě podmínky:

1.  $\det(sI - L) = q(s)$
2. dvojice  $(h^T, L)$  je pozorovatelná

Potom podle důsledku 3.3 je řešení  $X$  maticové rovnice (4.3) regulární a vynásobením (4.3) zprava maticí  $X^{-1}$  obdržíme

$$A + bh^T X^{-1} = XLX^{-1}.$$

Tedy  $f^T = h^T X^{-1}$  je hledaná stavová zpětná vazba, neboť podobné matice mají totožný charakteristický polynom.

Podle věty 3.6 je řešení  $X$  maticové rovnice (4.3) ve tvaru

$$X = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_1 & \ddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix} [p(L)]^{-1}$$

a tedy pro  $f^T$  platí

$$f^T = h^T p(L) \left\{ [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_1 & \ddots & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1}. \quad (4.4)$$

Vzorec (4.4) udává již explicitní vztah pro výpočet stavové zpětné vazby. Můžeme ho však ještě podstatně zjednodušit zvolíme-li  $L$  a  $h$  ve vhodném tvaru. Například zvolme

$$h^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -q_n & \dots & \dots & -q_1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Povšimněme si, že jsou splněny obě výše uvedené podmínky kladené na dvojici  $(h^T, L)$ . Nyní dosazením (4.5) do (4.4) již snadno obdržíme Bass - Guarrův vztah:

$$f^T = [p_n - q_n, p_{n-1} - q_{n-1}, \dots, p_1 - q_1] \begin{bmatrix} p_{n-1} & \cdots & p_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_1 & \ddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} \quad (4.6)$$

Uvedené odvození je správné pouze pro případ, že  $p(s)$  a  $q(s)$  jsou nesoudělné polynomy (viz předpoklady věty 3.6). Ze spojitosti však vyplývá, že (4.6) platí i pro případ, kdy  $p(s)$  a  $q(s)$  jsou soudělné.

## 4.2 Ackermannův vztah [10]

K odvození Ackermannova vztahu uijeme obdobný postup, avšak pro řešení  $X$  maticové rovnice (4.3) uijeme druhý explicitní vztah daný ve větě 3.6, tj.

$$X = -[q(A)]^{-1} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} q_{n-1} & \cdots & q_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ q_1 & \ddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix},$$

tedy

$$f^T = -h^T \left\{ [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \begin{bmatrix} q_{n-1} & \cdots & q_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ q_1 & \ddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} q(A)$$

neboli

$$f^T = -h^T \begin{bmatrix} h^T \\ h^T L \\ \vdots \\ h^T L^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{n-1} & \cdots & q_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ q_1 & \ddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}^{-1} [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} q(A). \quad (4.7)$$

Zvolíme-li opět  $L$  a  $h$  ve vhodném tvaru (4.5), potom (4.7) přejde na známý Ackermannův vztah

$$f^T = -[0 \ \dots \ 0 \ 1] [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} q(A). \quad (4.8)$$

## 5 Základní úloha modálního řízení

V této kapitole je podáno řešení základní úlohy modálního řízení zformulované v úvodu.

Uvažujme lineární stacionární systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.1)$$

kde  $\dot{x}$  značí  $\dot{x}(t)$  pro spojitý systém a  $x(t+1)$  pro diskrétní systém,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  je stav systému,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  je vektor řízení a  $A, B$  jsou reálné matice příslušných rozměrů. V celé této kapitole budeme předpokládat, že  $(A, B)$  je říditelná dvojice a že  $B$  má plnou sloupcovou hodnotu.

Jestliže je u systému (5.1) zavedena stavová zpětná vazba

$$u(t) = Fx(t), \quad (5.2)$$

potom vzniklý uzavřený systém je ve tvaru

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t). \quad (5.3)$$

Požadujeme, aby dynamické chování systému (5.3) bylo “podobné” dynamickému chování systému  $z(t) = Lz(t)$ , kde  $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je vhodně zvolená matice. Tento požadavek vede k definici množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$ ,

$$\mathcal{F}(A, B, L) \triangleq \{F \in \mathbf{R}^{m \times n} : A + BF \text{ je podobná } L\} \quad (5.4)$$

obsahující všechny stavové zpětné vazby  $F$  takové, že matice dynamiky systému (5.3) je podobná matici  $L$ . Poznamenejme, že jestliže (5.1) je systém s jedním vstupem, potom  $\mathcal{F}(A, B, L)$  obsahuje právě jednu zpětnou vazbu  $F$  anebo je prázdná. V obecném případě, tj. jestliže počet vstupů (5.1) je větší než 1, je však  $\mathcal{F}(A, B, L)$  obecně nekonečná množina. V takovém případě je  $\mathcal{F}(A, B, L)$  určitá algebraická varieta (nadplocha) v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ . Naším cílem bude nalézt explicitní parametrizaci množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  pomocí minimálního počtu návrhových parametrů a na základě této parametrizace navrhnout algoritmus výpočtu libovolné  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$ . Kromě toho je v této kapitole uveden nový důkaz Rosenbrockovy věty, která řeší otázku za jakých podmínek je množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  neprázdná.

V dalším budeme užívat následující označení:

$$\begin{aligned} \emptyset & \text{ prázdná množina} \\ \mu(A, B) & \mu(A, B) \triangleq \{\mu_i\}_{i=1}^m, \text{ kde } \mu_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ & \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0 \text{ jsou indexy říditelnosti dvojice } (A, B) \\ \nu(L) & \nu(L) \triangleq \{\nu_i\}_{i=1}^k, \text{ kde } \nu_i, i = 1, 2, \dots, k, \\ & \nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k \geq 0 \text{ jsou stupně všech nekonstantních} \end{aligned}$$



invariantních faktorů matice  $L$   
 $\sigma(A)$  spektrum matice  $A$   
 $\mathcal{Z}(L)$  množina všech zaměnitelných regulárních matic s maticí  $L$ , tj.

$$\mathcal{Z}(L) \triangleq \{Z \in \mathbf{R}^{n \times n} : LZ = ZL, \det Z \neq 0\}. \quad (5.5)$$

Dále budeme říkat, že vlastnost  $\pi(\alpha)$  platí pro skoro každé  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ , jestliže  $\pi(\alpha)$  platí pro všechny  $\alpha \in \mathbf{R}^r - \vartheta = \vartheta^c$ , kde  $\vartheta$  je některá *vlastní* algebraická varieta prostoru  $\mathbf{R}^r$ .

### 5.1 Parametrizace $\mathcal{F}(A, B, L)$ pomocí $mn$ parametrů

Nejprve uveďme dvě triviální vlastnosti  $\mathcal{F}(A, B, L)$ . Platí

$$\mathcal{F}(A, B, L) = \mathcal{F}(A, B, T^{-1}LT) \quad (5.6)$$

$$\mathcal{F}(A, B, L) = \{F + F_0 : F \in \mathcal{F}(A + BF_0, B, L)\}, \quad (5.7)$$

kde  $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je regulární a  $F_0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$  je libovolná. Vzhledem k (5.6) budeme bez omezení obecnosti předpokládat, že  $L$  je v *reálném Jordanově tvaru*. V důsledku (5.7) můžeme dále předpokládat, že matice  $A$  a  $L$  *nemají společná vlastní čísla*, tj.  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ . V případě, že tomu tak není, zvolme nejprve  $F_0$  tak, aby  $\sigma(A + BF_0) \cap \sigma(L) = \emptyset$  a potom uijme (5.7).

Nyní odvodíme parametrizaci  $\mathcal{F}(A, B, L)$  pomocí  $mn$  parametrů. Za tím účelem nechť je  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$ , potom podle (5.4) existuje regulární matice  $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  taková, že

$$A + BF = XLX^{-1}$$

neboli

$$AX - XL + BH = 0, \quad (5.8)$$

kde  $H = FX \in \mathbf{R}^{m \times n}$ . Obráceně, jestliže existuje  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  taková, že (5.8) má regulární řešení  $X$ , potom zřejmě  $F = HX^{-1} \in \mathcal{F}(A, B, L)$ .

Z předpokladu  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$  plyne, že maticová rovnice (5.8) má pro libovolné  $H$  právě jedno řešení (viz větu 3.3), označme ho  $X(H)$ . Dále označme

$$\mathcal{H} \triangleq \{H \in \mathbf{R}^{m \times n} : \det X(H) \neq 0\} \quad (5.9)$$

Z předchozího vyplývá následující tvrzení:

Množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je parametrizována vztahem

$$F(H) = HX^{-1}(H), \quad H \in \mathcal{H}, \quad (5.10)$$

tj. libovolná matice  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$  lze vyjádřit ve tvaru (5.10) a obráceně libovolná matice  $F(H)$  ve tvaru (5.10) patří do  $\mathcal{F}(A, B, L)$ .

Poznamenejme, že z předchozího dále plyne, že  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je neprázdná právě tehdy, jestliže existuje  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  takové, že maticová rovnice (5.8) má regulární řešení. O charakteru množiny  $\mathcal{H}$  definované vztahem (5.9) vypovídá následující lemma:

**Lemma 5.1** *Nechť  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$ ,  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ , potom řešení  $X(H)$  maticové rovnice (5.8) je regulární pro skoro každou matici  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$ . Jinými slovy:  $\mathcal{H} = \vartheta^c$ , kde  $\vartheta$  je některá vlastní varieta prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ .*

**Důkaz:** Přepišme (5.8) pomocí tenzorového součinu na známý tvar

$$(A \otimes I_n - I_n \otimes L^T)[X]_s = -[BH]_s \quad (5.11)$$

kde  $[X]_s$  je  $n^2$ -rozměrný vektor složený po řadě ze sloupců  $X$ ; obdobný význam má  $[BH]_s$ . Z předpokladu  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$  plyne, že matice soustavy (5.11)  $M = A \otimes I_n - I_n \otimes L^T$  je regulární a tudíž řešení  $X(H)$  maticové rovnice (5.8) je dáno vztahem

$$[X(H)]_s = -M^{-1}[BH]_s. \quad (5.12)$$

Z (5.12) je zřejmé, že každý prvek  $x_{ij}$  matice  $XH$  je polynom (prvého stupně) v prvcích  $h_{ij}$  a poněvadž podle předpokladu  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$  není tento polynom identicky rovný nule. Odtud plyne, že  $\det X(H)$  je nulový pouze na některé vlastní algebraické varietě prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ . //

Shrneme-li dosažené výsledky, můžeme formulovat následující algoritmus výpočtu libovolné  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$  v němž matice  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  reprezentuje návrhový vektorový parametr s dimenzí  $mn$ .

**Algoritmus 5.1 :**

*Krok 1:* Vyber  $L$  v reálném Jordanově tvaru.

*Krok 2:* Zvol  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  náhodně (nebo jinak).

*Krok 3:* Nalezni řešení  $X(H)$  maticové rovnice (5.8). Jestliže  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$ , potom je  $X(H)$  s pravděpodobností jedna regulární v důsledku lemmatu 5.1.

*Krok 4:* Vypočti  $F(H) = HX^{-1}(H)$ .

Uvedený algoritmus z hlediska počtu návrhových parametrů odpovídá algoritmu navrženému v [14]. V dalším však ukážeme, že lze redukovat počet volných prvků v matici  $H$  bez praktického omezení na volnost výběru zpětné vazby z množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$ . Nejprve však vyjasníme podmínky, za nichž je množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  neprázdná.

## 5.2 Rosenbrockova věta

V knize [11, str. 190], (1970) Rosenbrock dokázal nutnou a postačující podmínku pro přiřazení invariantních polynomů matici dynamiky uzavřeného systému pomocí stavové zpětné vazby. Poněvadž dvě matice jsou podobné právě tehdy, mají-li totožné invariantní polynomy, je zřejmé, že našel nutnou a postačující podmínku i pro to, kdy je množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  neprázdná.

Jeho důkaz, podobně jako později publikované důkazy [33], [34] a [35], je značně komplikovaný. Autor věří, že níže podaný důkaz je jednodušší a že umožňuje nahlédnout do podstaty věci.

**Věta 5.1** (Rosenbrock) *Nechť  $\mu(A, B) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$  a  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ , potom  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$  právě tehdy, jestliže  $k \leq m$  a pro všechny  $j = 1, 2, \dots, k$  platí*

$$\sum_{i=1}^j (\nu_i - \mu_i) \geq 0 \quad (5.13)$$

**Důkaz:** Nejprve si povšimněme, že pro libovolné regulární matice  $T \in \mathbf{R}^{n \times m}$  a  $V \in \mathbf{R}^{m \times m}$  a libovolnou  $F_0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$  platí

$$\mathcal{F}(A, B, L) = \{F = F_0 + V\bar{F}T : \bar{F} \in \mathcal{F}(T(A + BF_0)T^{-1}, TBV, L)\}. \quad (5.14)$$

Tedy  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je neprázdná právě tehdy, jestliže  $\mathcal{F}(T(A + BF_0)T^{-1}, TBV, L)$  je neprázdná množina. Bez omezení obecnosti tedy předpokládejme, že dvojice  $(A, B)$  je v Brunovské kanonické formě (viz věta 2.3), tj.

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ & & & & & \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 & & 0 \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \\ \hline \dots\dots\dots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

(5.15)

V dalším uijme platnost dříve dokázaného tvrzení (viz. odst. 5.1): Množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je neprázdná právě tehdy, jestliže existuje  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  taková, že maticová rovnice

$$AX - XL + BH = 0 \quad (5.16)$$

má regulární řešení  $X(H)$ . Podle věty 3.6 je řešení  $X(H)$  maticové rovnice (5.16), za předpokladu  $0 \notin \sigma(L)$ , dáno vztahem

$$X(H) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & I_m \\ & \ddots & \\ & & \\ I_m & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} L^{-n} =$$

$$= [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} H \\ H\bar{L} \\ \vdots \\ H\bar{L}^{n-1} \end{bmatrix} \bar{L} \quad (5.17)$$

kde  $\bar{L} = L^{-1}$ . Z (5.17) je zřejmé, že  $X(H)$  je regulární právě tehdy, jestliže součin  $M(H)$  prvních dvou matic zleva v (5.17) je regulární. Jsou-li  $h_1^T, \dots, h_m^T$  řádky matice  $H$  a užijeme-li (5.15) obdržíme

$$M(H) = [I_n \ 0] \begin{bmatrix} h_1^T \\ h_1^T \bar{L} \\ \vdots \\ h_1^T \bar{L}^{\mu_1-1} \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \\ h_m^T \\ h_m^T \bar{L} \\ \vdots \\ h_m^T \bar{L}^{\mu_m-1} \\ \text{---} \\ * \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

kde \* značí pro naše účely nedůležitou matici. Z (5.18) a z platnosti  $\nu(\bar{L}) = \nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$  snadno plyne (viz [27]), že volbou  $H$  lze dosáhnout regulární  $M(H)$  právě tehdy, jestliže  $k \leq m$  a jestliže současně platí

$$\begin{aligned} \nu_1 &\geq \mu_1 \\ \nu_1 + \nu_2 &\geq \mu_1 + \mu_2 \\ &\dots \\ \nu_1 + \dots + \nu_k &\geq \mu_1 + \dots + \mu_k. \end{aligned}$$

Tedy jestliže platí (5.13). Tím jsme dokázali tvrzení věty s výjimkou případu, kdy  $L$  je singulární matice, tj. kdy  $0 \in \sigma(L)$ . Důkaz postačitelnosti pro tento případ provedeme ve dvou krocích:

1. Nechť  $\hat{L} = -(L + \varepsilon I)$ , kde  $\varepsilon$  je zvoleno tak, že platí:

- (i)  $\hat{L}$  je regulární matice
- (ii)  $-(L + \frac{1}{2}\varepsilon I)$  je stabilní matice

Zřejmě takové  $\varepsilon$  vždy existuje. Poněvadž  $\nu(\hat{L}) = \nu(L)$ , existuje podle dříve dokázaného matice  $\mathcal{F}(A, B, \hat{L})$ , tj. platí

$$A + BF \approx -(L + \varepsilon I) \quad (5.19)$$

Odtud plyne

$$-(A + BF + \varepsilon I) \approx L \quad (5.20)$$

a

$$(A + BF + \frac{1}{2}\varepsilon I) \approx -(L + \frac{1}{2}\varepsilon I) \quad (5.21)$$

a podle předpokladu (ii) je  $A + BF + \frac{1}{2}\varepsilon I$  stabilní.

2. Poněvadž platí (5.21) a dvojice  $(A + BF + \frac{1}{2}\varepsilon I, B)$  je říditelná (neboť  $(A, B)$  je říditelná) má maticová rovnice

$$(A + BF + \frac{1}{2}\varepsilon I)X + X(A + BF + \frac{1}{2}\varepsilon I)^T + BB^T = 0 \quad (5.22)$$

podle věty 3.7 regulární řešení  $X$ . Tedy z (5.22) postupně plyne

$$(A + BF)X + X(A + BF + \varepsilon I)^T + BB^T = 0$$

a

$$A + BF + BB^T X^{-1} = -X(A + BF + \varepsilon I)X^{-1}. \quad (5.23)$$

Položíme-li  $\tilde{F} = F + B^T X^{-1}$ , potom z (5.23) a (5.20) plyne, že  $\tilde{F} \in \mathcal{F}(A, B, L)$  a tedy  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$ . Důkaz nutnosti lze provést zcela analogicky.//

### 5.3 Parametrizace $\mathcal{F}(A, B, L)$ pomocí minimálního počtu parametrů

Nejprve si připomeňme parametrizaci množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  odvozenou v odst. 5.1. Tam je ukázáno, že libovolná matice  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$  lze vyjádřit ve tvaru

$$F = F(H) = HX^{-1}(H), \quad H \in \mathcal{H}, \quad (5.24)$$

kde  $X(H)$  je řešení maticové rovnice

$$AX - XL + BH = 0 \quad (5.25)$$

a množina  $\mathcal{H}$  je definována vztahem

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathbf{R}^{m \times n} : \det X(H) \neq 0\}. \quad (5.26)$$

Platí též obrácené tvrzení: libovolná matice  $F(H)$  ve tvaru (5.24) patří do  $\mathcal{F}(A, B, L)$ .

V tomto odstavci provedeme redukci počtu návrhových parametrů v parametrizaci (5.24) na minimální možnou mez. K tomu bude užitečná následující lemma.

**Lemma 5.2** *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$  a  $H, \bar{H} \in \mathcal{H}$ , potom  $F(H) = F(\bar{H})$  právě tehdy, jestliže  $\bar{H} = HZ$ , kde  $Z \in \mathcal{Z}(L) \triangleq \{Z' \in \mathbf{R}^{n \times n} : LZ' = Z'L, \det Z' \neq 0\}$  je libovolná.*

**Důkaz:** 1. Necht'  $F(H) = F(\bar{H})$ . Z (5.24) a (5.25) plyne

$$\begin{aligned} A - X(H)LX^{-1}(H) + BF(H) &= 0 \\ A - X(\bar{H})LX^{-1}(\bar{H}) + BF(\bar{H}) &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením dostaneme

$$X(H)LX^{-1}(H) = X(\bar{H})LX^{-1}(\bar{H})$$

neboli

$$LX^{-1}(H)X(\bar{H}) = X^{-1}(H)X(\bar{H})L.$$

Označme  $Z = X^{-1}(H)X(\bar{H})$ . Zřejmě  $Z \in \mathcal{Z}(L)$ . Nyní platí

$$X(\bar{H}) = X(H)Z.$$

Z rovnosti  $F(H) = F(\bar{H})$  tedy plyne

$$\bar{H}X^{-1}(\bar{H}) = \bar{H}Z^{-1}X^{-1}(H) = HX^{-1}(H).$$

Odtud již  $\bar{H} = HZ$ .

2. Necht'  $\bar{H} = HZ$ ,  $Z \in \mathcal{Z}(L)$ . Vynásobením (5.25) zprava maticí  $Z$  obdržíme

$$AXZ - XZL + BHZ = 0.$$

Tedy  $X(\bar{H}) = X(H)Z$  a dále

$$F(\bar{H}) = \bar{H}X^{-1}(\bar{H}) = HZZ^{-1}X^{-1}(H) = HX^{-1}(H) = F(H). //$$

Dále budeme postupovat tak, že nejprve explicitně popíšeme všechny matice zaměnitelné s maticí  $L$ , kterou předpokládáme v reálném Jordanově normálním tvaru a potom tohoto popisu využijeme k snížení počtu návrhových parametrů v parametrizaci (5.24) na minimální možnou mez.

Připomeňme, že reálná Jordanova normální forma je blokově diagonální matice, kde diagonální bloky jsou dvojího typu; k reálnému vlastnímu číslu  $\lambda$  přísluší Jordanův blok

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Zatímco dvojici komplexních kořenů  $\sigma \pm i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ , přísluší blok typu

$$\begin{bmatrix} R & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & R \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

kde

$$R = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uveďme ještě, že z komplexní Jordanovy formy<sup>2</sup> matice snadno určíme příslušné stupně invariantních polynomů. Nechť  $L$  je na okamžik v komplexním Jordanově tvaru, který obsahuje

- $s_1$  Jordanových bloků příslušných k vlastnímu číslu  $\lambda_1$  s rozměry  $n_1^1 \geq n_2^1 \geq \dots \geq n_{s_1}^1$
- $s_2$  Jordanových bloků příslušných k vlastnímu číslu  $\lambda_2$  s rozměry  $n_1^2 \geq n_2^2 \geq \dots \geq n_{s_2}^2$
- $s_l$  Jordanových bloků příslušných k vlastnímu číslu  $\lambda_l$  s rozměry  $n_1^l \geq n_2^l \geq \dots \geq n_{s_l}^l$ .

Definujme

$$\nu_i \triangleq \sum_{j=1}^l n_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.29)$$

kde  $k = \max\{s_1, s_2, \dots, s_l\}$  a  $n_i^j = 0$  pro  $i > s_i$ . Snadno ověříme, že  $\nu_1, \dots, \nu_k$  jsou stupně invariantních polynomů matice  $L$  a že platí  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k$ . Užijeme-li dříve zavedeného označení, je tedy  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ .

Abychom mohli explicitně popsat množinu všech zaměnitelných matic s maticí v reálném Jordanově tvaru, uveďme následující definici.

**Definice 5.1** *Nechť matice  $M \in \mathbf{R}^{p\delta \times q\delta}$ ,  $\delta \in \{1, 2\}$  má následující formu*

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_2 \\ & & & A_1 \end{bmatrix} \triangleq U_p \quad \text{pro } p = q$$

$$M = [0 \ U_p] \quad \text{pro } p < q$$

$$M = \begin{bmatrix} U_q \\ - - - \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pro } p > q$$

kde matice  $A_i \in \mathbf{R}^{\delta \times \delta}$  jsou ve tvaru

$$A_i = [a_i] \quad \text{pro } \delta = 1$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \quad \text{pro } \delta = 2.$$

---

<sup>2</sup>Komplexní Jordanova forma obsahuje pouze Jordanovy bloky typu (5.27), kde však  $\lambda$  může být komplexní.

Jestliže  $\delta = 1$  ( $\delta = 2$ ), budeme matici  $M$  nazývat maticí typu  $T1$  ( $T2$ ). Prvky  $a_i$  ( $a_i, b_i$ ) budeme nazývat volnými prvky nebo parametry matice  $M$  typu  $T1$  ( $T2$ ).

**Lemma 5.3** *Nechť  $L = \text{diag } L_1, L_2, \dots, L_q$   $L_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $\sum_{i=1}^q n_i = n$ , je matice v reálné Jordanově normální formě ( $L_i$  jsou Jordanovy bloky ve tvaru (5.27) a (5.28)). Matice  $Z \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je zaměnitelná s  $L$  právě tehdy, jestliže je ve tvaru*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11}, \dots, Z_{1q} \\ \dots\dots\dots \\ Z_{q1}, \dots, Z_{qq} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

kde  $Z_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, q$  má následující význam:

1. Jestliže  $L_i$  a  $L_j$  přísluší k stejnému reálnému vlastnímu číslu, potom  $Z_{ij}$  je libovolná matice typu  $T1$ .
2. Jestliže  $L_i$  a  $L_j$  přísluší k stejné dvojici komplexně sdružených čísel, potom  $Z_{ij}$  je libovolná matice typu  $T2$ .
3. Ve všech ostatních případech je  $Z_{ij} = 0$ .

Dále jestliže  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ , potom počet  $N$  všech různých volných parametrů v  $Z$  je dán vztahem

$$N = \nu_1 + 3\nu_2 + \dots + (2k - 1)\nu_k. \quad (5.31)$$

**Důkaz:** Pro případ, že  $L$  má pouze reálná vlastní čísla, je tvrzení lemmatu dokázáno v [27]. Důkaz zde uvedeného zobecnění není obtížný a je z důvodu stručnosti vypuštěn.//

Z (5.30) plyne, že všech  $N$  různých volných parametrů matice  $Z$  leží v řádcích  $1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{q-1} + 1$  a to právě na jedné pozici. Označme  $S \in \mathbf{R}^{r \times n}$  podmatici  $Z$ , která obsahuje právě tyto řádky a definujme posloupnost  $\{\omega_i\}_{i=1}^n$  následovně:

$$\omega_i \triangleq \text{počet volných parametrů v } i\text{-tém sloupci matice } S \quad (5.32)$$

Pro jednoduchost budeme zapisovat  $\omega(Z) = \{\omega_i\}_{i=1}^n$ . Snadno lze ověřit, že platí

$$\omega_i \leq k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = N \quad (5.34)$$



**Příklad 5.1** Nechť

$$L = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \hline & & & -2 & 2 & \\ & & & -2 & -2 & \\ \hline & & & & & -1 \end{array} \right]$$

Zřejmě  $k = 2$  a  $\nu(L) = \{4, 1\}$ . Podle lemmatu 5.3 je libovolná matice  $Z$  zaměnitelná s  $L$  ve tvaru

$$Z = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} a & b & 0 & 0 & f \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 \\ \hline 0 & g & 0 & 0 & e \end{array} \right] \begin{array}{l} \longleftarrow 1 \\ \\ \longleftarrow n_1 + 1 \\ \\ \longleftarrow n_1 + n_2 + 1 \end{array} \quad (5.35)$$

kde  $a, b, c, d, e, f$  jsou nezávislé volné parametry; jejich počet je ve shodě (5.31)  $N = 4 + 3 \cdot 1 = 7$ . Dále z (5.32) plyne, že  $\omega(Z) = \{1, 2, 1, 1, 2\}$ .

V dalším využijeme jisté strukturální vlastnosti matice  $Z$  ve tvaru (5.30). Snadno nahlédneme, že sloupce  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  matice  $Z$  mají dvě různé formy:

1. Sloupec  $z_i$  je ve formě

$$z_i = [ | 0 \dots 0 a_i^{(i)} * \dots * | \dots | 0 \dots 0 a_{\omega_i}^{(i)} * \dots * | 0 \dots 0 ]^T \quad (5.36)$$

kde  $a_j^{(i)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \omega_i$  jsou volné parametry  $z_i$ , které se nevyskytují ve sloupcích matice  $Z$  stojících před sloupcem  $z_i$  (tj. ve sloupcích  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i - 1$ ) a \* značí ostatní volné parametry  $z_i$  (vyznačené 0 a \* v (5.31) mohou chybět). Sloupec matice  $Z$  mající formu (5.36) budeme v dalším nazývat *sloupec typu C1*. Viz 1., 2. a 5. sloupec v (5.35).

2. Sloupce  $z_i$  a  $z_{i+1}$  jsou ve formě

$$z_i = [ | 0 \dots 0 a_1^{(i)} - b_1^{(i)} * \dots * | \dots | 0 \dots 0 a_l^{(i)} - b_l^{(i)} * \dots * | 0 \dots 0 ]^T \quad (5.37)$$

$$z_{i+1} = [ | 0 \dots 0 b_1^{(i)} a_1^{(i)} * \dots * | \dots | 0 \dots 0 b_l^{(i)} a_l^{(i)} * \dots * | 0 \dots 0 ]^T \quad (5.38)$$

kde  $l \triangleq \omega_i = \omega_{i+1}$ ,  $a_j^{(i)}$ ,  $b_j^{(i)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  jsou volné parametry sloupců  $z_i$  a  $z_{i+1}$ , které se nevyskytují v žádném ze sloupců  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i - 1$  a \* označuje ostatní volné parametry  $z_i$  a  $z_{i+1}$  (vyznačené 0 a \* v (5.37) a (5.38) mohou chybět). O sloupci  $z_i$  ( $z_{i+1}$ ) budeme v dalším hovořit jako o *sloupci typu C2* (*C3*). Viz 3. a 4. sloupec v (5.35).

**Definice 5.2** Nechť  $k$  je počet nekonstantních invariantních polynomů matice  $L$ . Matici  $Q(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq k$ , jejíž prvky jsou buď pevná reálná čísla a nebo nezávislé reálné parametry (souhrně označené vektorovým parametrem  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ ), budeme nazývat parametrickou maticí příslušnou k matici  $L$ , jestliže jsou splněny následující podmínky:

- (i) V  $i$ -tém sloupci matice  $Q(\alpha)$  je  $m - \omega_i$  volných parametrů, kde  $\omega_i$  je určeno podle (5.32).
- (ii) Dvojice  $(Q(\alpha), L)$  je pozorovatelná pro všechny  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ .

Pro obecný případ je obtížné napsat  $Q(\alpha)$  v explicitním tvaru, avšak na příkladech ukážeme, že pro konkrétní  $L$  snadno najdeme k ní příslušnou parametrickou matici  $Q(\alpha)$ . Pro  $L$  nilpotentní je explicitní forma  $Q(\alpha)$  uvedena v kap. 7.

Z podmínky (i) definice 5.2 a z (5.34) plyne, že celkový počet  $r$  volných parametrů  $Q(\alpha)$  (tj. dimenze  $\alpha$ ) je dán vztahem

$$r = mn - N = mn - \nu_1 - 3\nu_2 - \dots - (2k - 1)\nu_k, \quad (5.39)$$

kde pro  $\nu_1, \dots, \nu_k$  platí  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ .

**Příklad 5.2** Nechť  $L$  je cyklická matice, tj. každému vlastnímu číslu přísluší pouze jeden Jordanův blok. V tomto případě je  $k = 1$  a  $\nu(L) = \{n\}$ . Snadno ověříme, že

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ * & * & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix}$$

je parametrická matice příslušná k  $L$ ; \*-ky značí volné parametry  $Q(\alpha)$  a jejich počet je dán vztahem  $r = (m-1)n$ . Povšimněme, že první řádek matice  $Q(\alpha)$  zajišťuje pozorovatelnost dvojice  $(Q(\alpha), L)$  pro libovolné  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ .

**Příklad 5.3** Nechť

$$L = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & | \\ & -1 & | \\ \hline & & | -1 | \\ \hline & & | -1 & 1 | & 1 & | \\ & & | -1 & -1 | & & 1 & | \\ \hline & & | & & | -1 & 1 | \\ & & | & & | -1 & -1 | \\ \hline & & & & & & | -1 & 1 \\ & & & & & & | -1 & -1 \end{array} \right]$$

potom  $k = 2$ ,  $\nu(L) = \{6, 3\}$ . Všechny matice  $Z$  zaměnitelné s maticí  $L$  mají následující tvar

$$Z = \left[ \begin{array}{ccc|cc|cc|cc} a & b & & d & & & & & & \\ & a & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ & e & & c & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ & & & & f & g & p & q & t & n \\ & & & & -g & f & -q & p & -n & t \\ \hline & & & & & & & & & \\ & & & & & f & g & & & \\ & & & & & -g & f & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ & & & & & v & w & r & s & \\ & & & & & -w & v & -s & r & \\ \hline \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \\ \leftarrow n_1 + 1 \\ \leftarrow n_1 + n_2 + 1 \\ \\ \leftarrow n_1 + n_2 + n_3 + 1 \end{array}$$

Platí  $\omega(Z) = \{1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2\}$  a snadno ověříme, že

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & . & . & . & . & . & . & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ * & * & . & . & . & . & . & . & * \end{bmatrix}$$

je parametrická matice příslušná k  $L$ . \*-ky zde opět označují volné parametry souhrně označené vektorovým parametrem  $\alpha$ . Poznamenejme, že první dva řádky matice  $Q(\alpha)$  zajišťují pozorovatelnost dvojice  $(Q(\alpha), L)$  pro libovolné  $\alpha$ .

**Lemma 5.4** *Nechť  $Q(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  je libovolná parametrická matice příslušná k matici  $L$ , potom pro skoro každou matici  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  existuje právě jedna hodnota vektorového parametru  $\alpha$  a právě jedna matice  $Z \in \mathcal{Z}(L)$  taková, že*

$$H = Q(\alpha)Z. \quad (5.40)$$

**Důkaz:** Nechť (5.40) platí pro některé  $H$ , potom platí též

$$H\bar{Z} = Q(\alpha) \quad (5.41)$$

pro  $\bar{Z} = Z^{-1}$ . Zřejmě  $\bar{Z} \in \mathcal{Z}(L)$ . Podobně obráceně z (5.41) plyne (5.40). Stačí tedy dokázat, že pro skoro každou  $H$  existuje právě jedno  $\alpha$  a jedna matice  $\bar{Z} \in \mathcal{Z}(L)$  taková, že platí (5.41).

Označme  $h_i$ ,  $\bar{z}_i$  a  $q_i(\alpha)$  po řadě  $i$ -tý sloupec matice  $H$ ,  $\bar{Z}$  a  $Q(\alpha)$ . Nyní můžeme (5.41) vyjádřit ve tvaru

$$H\bar{z}_i = q_i(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.42)$$

V dalším rozlišíme dva případy:

1.  $\bar{z}_i$  je typu C1 (viz (5.36)), potom (5.42) pro toto  $i$  přejde na

$$h_{j_1}a_1^{(i)} + h_{j_2}a_2^{(i)} + \dots + h_{j_{\omega_i}}a_{\omega_i}^{(i)} = q_i(\alpha) + v_i^*, \quad (5.43)$$

kde  $h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_{\omega_i}}$  jsou příslušné sloupce matice  $H$  a  $v_i^*$  je vektor, který závisí pouze na těch volných parametrech  $\bar{Z}$ , které se vyskytují alespoň v jednom sloupci  $\bar{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1$  (a tedy nezávisí na  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{\omega_i}^{(i)}$ ).

2.  $\bar{z}_i$  a  $z_{i+1}$  jsou sloupce po řadě typu C2 a C3 (viz (5.37) a (5.38)), potom (5.42) pro toto  $i$  a  $i+1$  přejde na

$$\begin{aligned} h_{k_1}a_1^{(i)} - h_{k_1+1}b_1^{(i)} + h_{k_2}a_2^{(i)} - h_{k_2+1}b_2^{(i)} + \dots + h_{k_l}a_l^{(i)} - h_{k_l+1}b_l^{(i)} = \\ = q_i(\alpha) + v_i^* \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} h_{k_1+1}a_1^{(i)} + h_{k_1}b_1^{(i)} + h_{k_2+1}a_2^{(i)} + h_{k_2}b_2^{(i)} + \dots + h_{k_l+1}a_l^{(i)} + h_{k_l}b_l^{(i)} = \\ = q_{i+1}(\alpha) + v_{i+1}^*, \end{aligned} \quad (5.45)$$

kde  $h_{k_1}, h_{k_2}, \dots, h_{k_l}$  jsou příslušné sloupce matice  $H$  a  $v_i^*$  a  $v_{i+1}^*$  jsou vektory, které závisí pouze na těch volných parametrech  $\bar{Z}$ , které se vyskytují alespoň v jednom sloupci  $\bar{z}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, i-1$  (a tedy nezávisí na  $a_1^{(i)}, b_1^{(i)}, a_2^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, a_l^{(i)}, b_l^{(i)}$ ).

Nyní můžeme řešit rovnici (5.42) pro neznámé  $\alpha$  a  $\bar{Z}$  následujícím způsobem.

*Krok 1:* Položme  $i=1$ .

*Krok 2:* Je-li  $\bar{z}_i$  sloupec typu C1, určíme parametry  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{\omega_i}^{(i)}$  sloupce  $\bar{z}_i$  tak, aby rovnice (5.43) platila v řádkách, kde v  $q_i(\alpha)$  jsou pevné prvky. Těch je podle předpokladu  $\omega_i$  (viz definice 5.2). Jestliže je příslušný minor  $\kappa_i(\omega_i \times \omega_i)$  matice  $H$  různý od nuly, existuje právě jedno řešení této úlohy. Dále jednoznačnou volbou volných prvků  $q_i(\alpha)$  dosáhneme rovnosti i ve zbylých řádkách rovnice (5.43).

Přiřaďme  $i := i+1$  a jděme na krok 3.

Jsou-li  $\bar{z}_i$  a  $z_{i+1}$  po řadě typu C2 a C3, určíme parametry  $a_1^{(i)}, b_1^{(i)}, a_2^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, a_l^{(i)}, b_l^{(i)}$  sloupců  $\bar{z}_i$  a  $z_{i+1}$  tak, aby rovnice (5.44) a (5.45) platily v řádkách, kde jsou v  $q_i(\alpha)$  a  $q_{i+1}(\alpha)$  pevné prvky. Těch je

podle předpokladu právě  $2l = 2\omega_i = 2\omega_{i+1}$  (viz definici 5.2). Jestliže je příslušný minor  $\kappa_i$  ( $2l \times 2l$ ) soustavy (5.44), (5.45) různý od nuly, existuje právě jedno řešení této úlohy. Dále jednoznačnou volbou volných prvků v  $q_i(\alpha)$  a  $q_{i+1}(\alpha)$  dosáhneme rovnosti i ve zbylých řádkách (5.44) a (5.45). Definujme  $\kappa_{i+1} = 1$ , přiřaďme  $i := i + 1$  a jděme na krok 3.

*Krok 3:* Jestliže  $i > n$  proces ukončíme; v opačném případě jděme na krok 2.

Snadno se lze přesvědčit, že pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$  existuje  $H$  taková, že  $\kappa_i \neq 0$ . Tedy  $\kappa(H) = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n$  je polynom v prvcích  $h_{ij}$  matice  $H$ , který není identicky rovný nule. Odtud plyne na základě předchozího postupu, že pro skoro každou matici  $H$  existuje právě jedna matice  $\bar{Z}$  zaměnitelná s  $L$  a právě jedna hodnota vektorového parametru  $\alpha$  taková, že platí (5.41). Zbývá dokázat, že určená  $\bar{Z}$  je vždy regulární. Z (5.41) plyne

$$\begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} \bar{Z} = \begin{bmatrix} Q(\alpha) \\ Q(\alpha)L \\ \vdots \\ Q(\alpha)L^{n-1} \end{bmatrix}$$

Poněvadž matice na pravé straně má podle definice 5.2 hodnotu  $n$  pro všechny  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ , plyne odtud, že  $\bar{Z}$  je regulární pro všechny  $H$ , pro které je  $\kappa(H) \neq 0$ .

Hlavní výsledek této kapitoly je obsažen v následující větě.

**Věta 5.2** *Nechť  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$ ,  $\sigma(A) \cap \sigma(L) \neq \emptyset$ ,  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$  a  $Q(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  je libovolná parametrická rovnice příslušná k  $L$ . Dále necht'  $X(\alpha)$  je řešení maticové rovnice*

$$AX - XL + BQ(\alpha) = 0 \quad (5.46)$$

a

$$\mathcal{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbf{R}^r : \det X(\alpha) \neq 0\}. \quad (5.47)$$

*Potom platí:*

(i) *Počet volných parametrů v parametrické matici  $Q(\alpha)$  je dán vztahem*

$$r = mn - \nu_1 - 3\nu_2 - \dots - (2k - 1)\nu_k. \quad (5.48)$$

(ii) *Pro skoro každé  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  je  $X(\alpha)$  regulární, tj.  $\mathcal{A} = \mathbf{R}^r - \vartheta_a$ , kde  $\vartheta_a$  je některá vlastní varieta v prostoru  $\mathbf{R}^r$ .*

(iii) *Existuje hustá a otevřená podmnožina  $\mathcal{F}'$  množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  taková, že libovolná matice  $F \in \mathcal{F}'$  lze vyjádřit ve tvaru*

$$F = F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1}(\alpha), \alpha \in \mathcal{A} \quad (5.49)$$

a to právě jedním způsobem; obráceně libovolná matice  $F$  ve tvaru (5.49) patří do  $\mathcal{F}(A, B, L)$ .

**Důkaz:** Tvrzení (i) již bylo dokázáno viz (5.39). Z lemmatu 5.1 a lemmatu 5.4 bezprostředně plyne, že existuje alespoň jedno  $\alpha$  takové, že  $X(\alpha)$  je regulární. Tvrzení (ii) lze nyní dokázat stejným způsobem jako je dokázáno lemma 5.1.

Nyní dokážeme tvrzení (iii). Označme  $\bar{\mathcal{H}} = \{Q(\alpha)Z : Z \in \mathcal{Z}(L), \alpha \in \mathcal{A}\}$ . Podle lemmatu 5.4 a tvrzení (ii) existuje množina  $\mathcal{H}' \subset \bar{\mathcal{H}}$  taková, že platí:

1.  $\mathcal{H}'$  je hustá a otevřená podmnožina prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$
2. libovolná  $H \in \mathcal{H}'$  lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru  $H = Q(\alpha)Z$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $Z \in \mathcal{Z}(L)$ .

Dále z lemmatu 5.2 plyne

$$\{F(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\} = \{F(H) : H \in \bar{\mathcal{H}}\} \supset \{F(H) : H \in \mathcal{H}'\}, \quad (5.50)$$

kde  $F(H)$  je dáno vztahem (5.24). Poněvadž  $H \mapsto F(H)$  je spojitě zobrazení a  $\mathcal{H}'$  je hustá a otevřená podmnožina  $\mathbf{R}^{m \times n}$ , vyplývá z vlastností parametrizace (5.24) a z platnosti (5.50), že  $\{F(\alpha) : F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1}(\alpha), \alpha \in \mathcal{A}\}$  je hustá a otevřená v  $\mathcal{F}(A, B, L)$ . Tvrzení o jednoznačnosti plyne z vlastnosti 2. množiny  $\mathcal{H}'$ . //

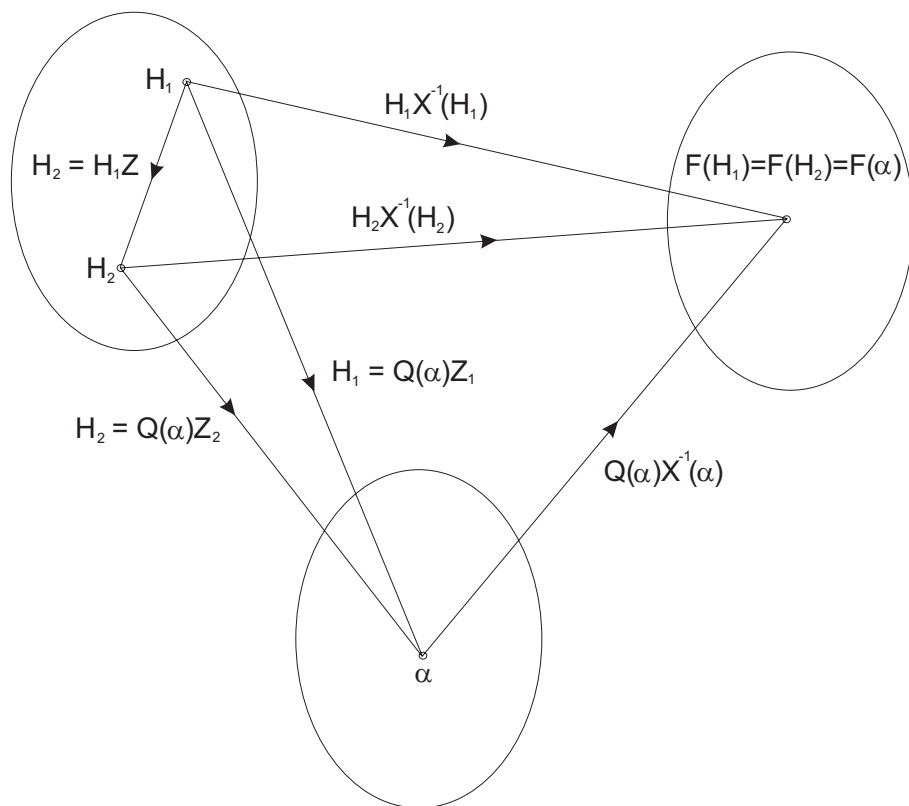
**Poznámka 5.1** Vztah (5.49) parametrizuje skoro celou množinu  $\mathcal{F}(A, B, L)$  pomocí minimálního počtu parametrů. Skutečnost, že může existovat  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$ , kterou nelze vyjádřit ve tvaru (5.49) není příliš na závadu, poněvadž tato  $F$  může být aproximována s libovolnou přesností pomocí  $F(\alpha)$  mající již tvar (5.49).

Kromě toho při změně struktury parametrické matice  $Q(\alpha)$  se změní i množina těch prvků  $\mathcal{F}(A, B, L)$ , které nelze vyjádřit ve tvaru (5.49).

**Poznámka 5.2** Souvislost mezi parametrizací (5.24) a (5.49) a ideu redukce počtu návrhových parametrů v parametrizaci (5.24) vyjadřuje následující diagram:

$\mathcal{H}, \dim \mathcal{H} = mn$

$\mathcal{F}(A, B, L), \dim \mathcal{F}(A, B, L) = r$



$A, \dim A = r$

**Poznámka 5.3** Věta 5.2 dává odpověď na otázku, jaký je počet  $r$  stupňů volnosti ve výběru  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$ , tj. jaká je lokální dimenze nadplochy  $\mathcal{F}(A, B, L)$  v prostoru  $R^{m \times n}$ .

Například jestliže  $L$  je cyklická matice, platí

$$r = mn - n = n(m - 1).$$

Tato relativně velká volnost ve výběru se však podstatně sníží v případě, kdy  $L$  má větší počet nekonstantních invariantních polynomů. Za jistých okolností může  $\mathcal{F}(A, B, L)$  dokonce obsahovat i při  $m > 1$  pouze jedinou matici.

Na základě věty 5.2 můžeme zformulovat následující algoritmus, v němž  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  hraje roli vektorového návrhového parametru.

**Algoritmus 5.2 :**

*Krok 1:* Vyber  $L$  v reálném Jordanově tvaru,  $\sigma(A) \cap \sigma(L) \neq \emptyset$ .

*Krok 2:* Urči parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ <sup>3</sup>.

*Krok 3:* Zvol  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  náhodně (nebo jinak).

*Krok 4:* Nalezni řešení  $X(\alpha)$  maticové rovnice (5.46). Jestliže  $\mathcal{F}(A, B, L) \neq \emptyset$ , potom  $X(H)$  je s pravděpodobností jedna regulární v důsledku tvrzení (ii) věty 5.2.

*Krok 5:* Vypočti  $F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1}(\alpha)$ .

**Příklad 5.4** Uvažujme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poněvadž  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \{0\}$ , zvolme

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a definujme  $\bar{A} = A + BF_0$ . Nyní  $\sigma(\bar{A}) \cap \sigma(L) = \emptyset$  a můžeme tedy použít větu 5.2 k parametrizaci množiny  $\mathcal{F}(\bar{A}, B, L)$ . Podle lemmatu 5.3 je libovolná matice  $Z$  zaměnitelná s  $L$  ve tvaru

$$Z = \begin{bmatrix} a & -0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & f & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}.$$

Tedy  $\omega(Z) = \{1, 1, 2, 2\}$ . Na základě definice 5.2 snadno ověříme, že

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T \in \mathbf{R}^2$$

je parametrická matice příslušná k  $L$ . Řešení maticové rovnice

$$\bar{A}X - XL + BQ(\alpha) = 0$$

je ve tvaru

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \alpha_2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \alpha_2 & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<sup>3</sup>jestliže je  $L$  cyklická, lze  $Q(\alpha)$  zvolit ve tvaru uvedeném v příkladu 5.2



a

$$\det X(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Použijeme-li nyní vztah (5.7) a tvrzení (iii) věty 5.2 obdržíme, že množina

$$\{F(\alpha) : F(\alpha) = Q(\alpha)X^{-1}(\alpha) + F_0, \det X(\alpha) \neq 0\},$$

kde

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} & 0 \\ \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} & 0 & \frac{-2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} & -1 \end{bmatrix}$$

je hustá a otevřená v množině  $\mathcal{F}(A, B, L)$ .

## 6 Neúplné modální přiřazení stavovou zpětnou vazbou

V této kapitole se budeme zabývat určitým zobecněním výsledků předcházející kapitoly. Toto zobecnění spočívá v tom, že budeme požadovat, aby matice dynamiky uzavřeného systému byla podobná matici

$$\begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

kde  $L$  je daná čtvercová matice, jejíž rozměr je menší než je dimenze stavového prostoru a  $*$ -ky značí libovolné matice příslušných rozměrů. Tedy, zatímco dříve jsme se zabývali zhruba řečeno přiřazením všech pólů, nyní budeme zkoumat přiřazení jen určitého počtu pólů pomocí stavové zpětné vazby. Podobně jako dříve nalezneme explicitní formu všech stavových zpětných vazeb splňujících uvedenou podmínku.

### 6.1 Formulace problému

Uvažujme říditelný systém  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\text{rank } B = m$  a matici  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ,  $s < n$ . Předpokládejme bez ztráty obecnosti (podobně jako v kapitole 5), že  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ . Definujme

$$\mathcal{F}_s(A, B, L) \triangleq \{F \in \mathbf{R}^{m \times n} : A + BF \text{ je podobná matici } \begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix}\}. \quad (6.1)$$

Naším úkolem je nalézt explicitní parametrizaci množiny  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$  pomocí minimálního počtu parametrů.

### 6.2 Parametrizace $\mathcal{F}_s(A, B, L)$

Nejprve pro úplnost uveďme důsledek Rosenbrockovy věty (viz věta 5.1) vyjasňující podmínku, za níž je množina  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$  neprázdná.

**Věta 6.1** *Nechť  $\mu(A, B) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$ ,  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ , potom  $\mathcal{F}_s(A, B, L) \neq \emptyset$  právě tehdy, jestliže  $k \leq m$  a pro všechny  $j = 1, 2, \dots, k$  platí*

$$n - s + \sum_{i=1}^j (\nu_i - \mu_i) \geq 0. \quad (6.2)$$

**Důkaz:** 1. Nechť platí (6.2). Označme  $\bar{L} = \text{diag}(L, \tilde{L})$ . Zřejmě matice  $\bar{L}$  lze zvolit tak, že  $\nu(\bar{L}) = \{\nu_1 + n - s, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k\}$ . Podle Rosenbrockovy věty je (6.2) postačující podmínka k tomu, aby existovala matice  $F$  taková, že  $A + BF$  je podobná matici  $L$ . Tedy  $\mathcal{F}_s(A, B, L) \neq \emptyset$ .

2. Nechť  $\mathcal{F}_s(A, B, L) \neq \emptyset$ , potom podle definice existuje matice  $F$  taková, že  $A + BF$  je podobná matici  $\bar{L}$ ,

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}. \quad (6.3)$$

Snadno ověříme, že jestliže neplatí (6.2), nemůže platit ani

$$\sum_{i=1}^j \bar{\nu}_i - \mu_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

kde  $\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_k$  jsou takové, že platí  $\nu(\bar{L}) = \{\bar{\nu}_i\}_{i=1}^{\bar{k}}$ ,  $\bar{k} \geq k$  a  $\bar{L}$  je ve tvaru (6.3), neboť

$$n - s + \sum_{i=1}^j \nu_i \geq \sum_{i=1}^j \bar{\nu}_i, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Tedy podle Rosenbrockovy věty nemůže být matice  $A + BF$  podobná matici  $\bar{L}$ . Což je však spor. //

Nyní se budeme zabývat parametrizací  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$ . Nejprve uvedeme parametrizaci pomocí  $mn$  parametrů a potom zredukujeme jejich počet na minimální možnou mez.

Uvažujme maticovou rovnici

$$AX - XL + BH = 0, \quad (6.4)$$

kde  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$  a označme

$$\mathcal{H}_s = \{H \in \mathbf{R}^{m \times s} : \text{rank } X(H) = s\}, \quad (6.5)$$

kde  $X(H)$  značí jediné řešení maticové rovnice (6.4).

**Věta 6.2** *Nechť  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$  a nechť  $\mathcal{F}_s(A, B, L) \neq \emptyset$ , potom platí:*

(i) *Pro skoro každou matici  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$  má řešení  $X(H)$  maticové rovnice (6.4) plnou sloupcovou hodnotu; jinými slovy  $\mathcal{H}_s = \mathbf{R}^{m \times s} - \emptyset$ , kde  $\emptyset$  je vlastní varieta prostoru  $\mathbf{R}^{m \times s}$ .*

(ii) *Libovolný prvek  $F \in \mathcal{F}_s(A, B, L)$  lze vyjádřit ve tvaru*

$$F \triangleq F(H, \hat{F}) = H[X^T(H)X(H)]^{-1}X^T(H) + \hat{F}, \quad (6.6)$$

*kde  $H \in \mathcal{H}_s$ ,  $X(H)$  je řešení maticové rovnice (6.4) a  $\hat{F} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  je vhodná matice splňující podmínku  $\hat{F}X(H) = 0$ . Obráceně libovolná matice  $F$  ve tvaru (6.6) patří za výše uvedených předpokladů do  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$ .*

**Důkaz:** 1. Nechť  $F \in \mathcal{F}_s(A, B, L)$ , potom existuje regulární  $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , že

$$AT - TM + BFT = 0, \quad (6.7)$$

kde  $M = \begin{bmatrix} L & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}$  a  $Y, Z$  jsou vhodné matice. Označme  $T = [X, V]$ ,  $X \in \mathbf{R}^{n \times s}$ ,  $V \in \mathbf{R}^{n \times n-s}$  potom (6.7) přejde na

$$AX - XL + BFX = 0 \quad (6.8)$$

a

$$AV - XZ + VY + BFV = 0. \quad (6.9)$$

Z (6.8) plyne, že existuje  $H = FX$  taková, že řešení  $X(H)$  maticové rovnice (6.4) má plnou sloupcovou hodnotu, tj. že existuje  $H$  patřící do  $\mathcal{H}_s$ . Odtud již snadno plyne tvrzení (i) dokazované věty. Dále z (6.8) plyne, že  $F$  splňuje maticovou rovnici

$$H = FX(H) \quad (6.10)$$

pro některou  $H \in \mathcal{H}_s$ . Obecné řešení této rovnice pro neznámou  $F$  je dáno vztahem (6.6)<sup>4</sup>. Dokázali jsme tedy, že libovolný prvek  $F \in \mathcal{F}_s(A, B, L)$  lze vyjádřit ve tvaru (6.6).

2. Uvažujme systém  $S_1$

$$S_1 : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Lx, x(0) = x_0 \\ u &= Hx, \end{aligned} \quad (6.11)$$

který řídí systém  $S_2$

$$S_2 : \quad \dot{z} = Az + Bu, z(0) = z_0 \quad (6.12)$$

Situace je znázorněna na obrázku 3.1. Podle věty 3.1 platí

$$z(t) = X(H)x(t), t > 0 \quad (6.13)$$

za předpokladu, že  $z_0 = X(H)x_0$ , kde  $X(H)$  je jediné řešení maticové rovnice (6.4). Nyní nechť  $F$  je ve tvaru (6.6), potom z (6.13) plyne

$$Fz(t) = \{H[X^T(H)X(H)]^{-1}X^T(H) + \hat{F}\}X(H)x(t) = Hx(t) = u(t) \quad (6.14)$$

Z (6.14) plyne, že chování systému  $S_2$  se nezmění pro daný počáteční stav  $z_0$ , jestliže je řízení systému  $S_2$  dané vztahy (6.11) nahrazeno stavovou zpětnou vazbou

$$u(t) = Fz(t). \quad (6.15)$$

---

<sup>4</sup>Pro řešení  $F$  s minimální euklidovskou normou viz poznámka 6.2

Poněvadž v předchozích úvahách nezáleželo na výběru počátečního stavu  $x_0$  systému  $S_1$  a poněvadž předpokládáme, že  $\text{rank } X(H) = s$ , existuje vzhledem k platnosti (6.13) invariantní podprostor  $\mathcal{L} = \text{Im } X(H)$  matice  $A + BF$  takový, že matice indukovaná operátorem  $A + BF|_{\mathcal{L}}$  je podobná matici  $L$ . Tím jsme dokázali, že libovolná matice  $F$  ve tvaru (6.6) patří za uvedených předpokladů do  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$ .

**Poznámka 6.1** Nechtě  $r_1, r_2, \dots, r_{n-s}$  je báze ortogonálního doplňku prostoru  $\text{Im } X(H)$ , potom libovolnou matici  $\hat{F} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  splňující podmínku  $\hat{F}X(H) = 0$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\hat{F} = PR(H),$$

kde  $R(H) = [r_1, \dots, r_{n-s}]^T$  a  $P \in \mathbf{R}^{m \times n-s}$  je libovolná matice. Parametrizace (6.6) lze nyní vyjádřit ve tvaru

$$F(H, P) = H[X^T(H)X(H)]^{-1}X^T(H) + PR(H), \quad (6.16)$$

kde  $H \in \mathcal{H}_s$  a  $P \in \mathbf{R}^{m \times n-s}$  jsou libovolné.

**Poznámka 6.2** Z důkazu věty 6.2 plyne, že

$$\min_{\hat{F}} \|F(H, \hat{F})\|_E = \|F^*(H)\|_E = \|H[X^T(H)X(H)]^{-1}X^T(H)\|_E$$

$$\hat{F}X(H) = 0,$$

kde  $\|W\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |w_{ij}|^2}$  je euklidovská norma matice. Tedy  $F \in \mathcal{F}_s(A, B, L)$  s minimální euklidovskou normou je jistě ve tvaru

$$F(H) = H[X^T(H)X(H)]^{-1}X^T(H), \quad H \in \mathcal{H}_s.$$

Celkový počet (mn) návrhových parametrů v parametrizaci (6.6) a nebo (6.16) můžeme nyní redukovat obdobným způsobem jako v předchozí kapitole. Výsledek je shrnut v následující větě.

**Věta 6.3** Nechtě  $\mathcal{F}_s(A, B, L) \neq \emptyset$ ,  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ ,  $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ ,  $Q(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times s}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ , je libovolná parametrická matice příslušná k  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ . Dále nechtě  $X(\alpha)$  je řešení maticové rovnice

$$AX - XL + BQ(\alpha) = 0 \quad (6.17)$$

a

$$\mathcal{A}_s \triangleq \{\alpha \in \mathbf{R}^r : \text{rank } X(\alpha) = s\}.$$

Potom platí

- (i) Pro skoro každé  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  má řešení  $X(\alpha)$  plnou sloupcovou hodnotu, tj.  $\mathcal{A}_s = \mathbf{R}^r - \vartheta$ , kde  $\vartheta$  je některá vlastní varieta prostoru  $\mathbf{R}^r$ .
- (ii) Existuje hustá a otevřená podmnožina  $\mathcal{F}'_s$  množiny  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$  taková, že libovolná matice  $F \in \mathcal{F}'_s$  lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$F = F(\alpha, \hat{F}) \triangleq Q(\alpha)[X^T(\alpha)X(\alpha)]^{-1}X^T(\alpha) + \hat{F}, \quad (6.18)$$

kde  $\alpha \in \mathcal{A}_s$  a  $\hat{F} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  je vhodná matice splňující podmínku  $\hat{F}X(\alpha) = 0$ . Obráceně libovolná matice  $F$  ve tvaru (6.18) patří za výše uvedených předpokladů do  $\mathcal{F}_s(A, B, L)$ .

- (iii) Počet  $q$  volných návrhových parametrů v parametrizaci (6.18) je dán vztahem

$$q = r + m(n - s) = mn - \nu_1 - 3\nu_2 - \dots - (2k - 1)\nu_k. \quad (6.19)$$

**Poznámka 6.3** Jestliže  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  je cyklická matice, potom vztah (6.19) přejde na

$$q = mn - s.$$

Tedy zhruba řečeno, jestliže přiřazujeme  $s$  různých pólů, přičemž na zbylých pólech nám nezáleží, potom máme  $mn - s$  stupňů volnosti ve výběru zpětnovazební matice.

**Poznámka 6.4** Jestliže chceme nalézt  $F \in \mathcal{F}_s(A, B, L)$  s minimální euklidovskou normou, potom v (6.18) musí být  $\hat{F} = 0$  (viz poznámka 6.2) a tedy  $F$  stačí hledat ve tvaru

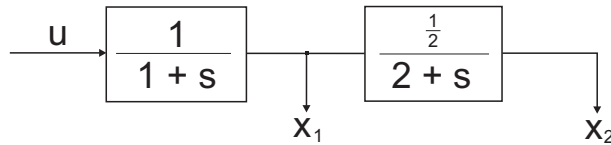
$$F = F(\alpha) = Q(\alpha)[X^T(\alpha)X(\alpha)]^{-1}X^T(\alpha),$$

kde  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  a

$$r = ms - \nu_1 - 3\nu_2 - \dots - (2k - 1)\nu_k.$$

Pro cyklickou  $L$  dostáváme  $r = s(m - 1)$ .

**Příklad 6.1** Uvažujme systém podle obr. 6.1



obr. 6.1

Jeho stavový popis je

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Nalezneme všechny stavové zpětné vazby přiřazující uzavřenému systému pól  $-3$ . Užijme věty 6.2.

Řešení maticové rovnice

$$AX - XL + BH = 0$$

pro

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = [-3], \quad H = [1]$$

je dáno vztahem

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Podle věty 6.2 jsou všechny požadované zpětné vazby ve tvaru

$$F(a) = Q[X^T X]^{-1} + \hat{F} = \left[-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right] + \left[\frac{1}{4}a, \frac{1}{2}a\right],$$

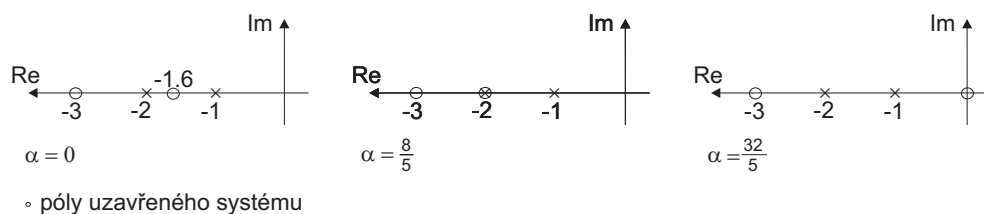
kde  $a \in \mathbf{R}$  je návrhový parametr. Snadno se přesvědčíme, že  $\|F(a)\|_E^2$  nabývá minima (ve shodě s poznámkou 6.2) pro  $a = 0$ . Poznamenejme ještě, že pro  $a_1 = -\frac{8}{5}$  je

$$F_1 \triangleq F(a_1) = [-2, 0]$$

a pro  $a_2 = \frac{32}{5}$  je

$$F_2 \triangleq F(a_2) = [0, 4].$$

Rozložení pólů pro výše uvedené případy je znázorněno na obr. 6.2.



obr. 6.2

## 7 Parametrizace regulátorů konečného počtu kroků

V kapitole 5 je řešen obecný problém parametrizace množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  všech zpětnovazebních matic přiřazujících uzavřenému systému zadanou Jordanovu formu  $L$ . V této kapitole se budeme zabývat důležitým speciálním případem, kdy  $L$  je nilpotentní maticem tj, některá její mocnina je nulová matice. Tento případ se vyskytuje při návrhu stavových zpětnovazebních regulátorů konečného počtu kroků.

Uvažujme lineární diskrétní systém

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (7.1)$$

kde  $x_k \in \mathbf{R}^n$  je stavový vektor,  $u_k \in \mathbf{R}^m$  je vektor řízení a  $A, B$  jsou reálné matice příslušných rozměrů. V dalším budeme bez omezení obecnosti předpokládat, že  $(A, B)$  je říditelná dvojice,  $A$  je regulární matice a matice  $B$  má plnou sloupcovou hodnotu.

Problém stavových regulátorů konečného počtu kroků lze formulovat následovně: Nalezněte stacionární zpětnovazební matici  $F$  takovou, že zákon řízení

$$u_k = Fx_k \quad (7.2)$$

převádí libovolný stav  $x_0$  v konečném počtu kroků do počátku stavového prostoru. Dosazením (7.2) do (7.1) obdržíme

$$x_{k+1} = (A + BF)^k x_0. \quad (7.3)$$

Odtud plyne, že množina všech matic  $F$  odpovídajících regulátorům konečného počtu kroků je dána předpisem

$$\mathcal{D}(A, B) = \{F \in \mathbf{R}^{m \times n} : (A + BF) \text{ je nilpotentní}\}. \quad (7.4)$$

Množina všech nilpotentních matic řádu  $n$  se vzhledem k relaci podobnosti matic rozpadá na třídy ekvivalence. Za reprezentanty těchto tříd můžeme vzít matice v Jordanově kanonickém tvaru

$$L(k; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) \triangleq \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & N_k \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

kde  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_i \in \mathbf{R}^{\nu_i \times \nu_i}$  je matice, jejíž naddiagonála obsahuje jednotkové prvky a zbylé prvky jsou nulové. Navíc budeme předpokládat, že  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k > 0$  a  $\sum_{i=1}^k \nu_i = n$ . Ovšem jen pro některé



$k, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  existuje  $F$  taková, že  $A+BF$  je podobná matici  $L(k; \nu_1, \dots, \nu_k)$ . Podle věty 5.1 jsou to právě ty  $k, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ , pro které platí:

$$\begin{aligned} 1. & k \leq m \\ 2. & \sum_{i=1}^j (\nu_i - \mu_i) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (7.6)$$

kde  $\mu_1, \dots, \mu_m, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m, \sum_{i=1}^m \mu_i = n$  jsou indexy říditelnosti dvojice  $(A, B)$ .

Je zřejmé, že podmínky (7.6) splňuje pouze konečný počet nilpotentních matic ve tvaru (7.5). Tyto matice budeme nazývat *přípustné* pro dvojici  $(A, B)$ . Nechtě  $L_1, L_2, \dots, L_w$  jsou všechny přípustné matice ve tvaru (7.5), potom zřejmě

$$\mathcal{D}(A, B) = \bigcup_{i=1}^w \mathcal{F}(A, B, L_i), \quad (7.7)$$

kde  $\mathcal{F}(A, B, L_i)$  má stejný význam jako v kapitole 5.

Tedy problém parametrizace  $\mathcal{D}(A, B)$  pomocí minimálního počtu parametrů se rozpadá na  $w$  již vyřešených problémů parametrizace disjunktních množin  $\mathcal{F}(A, B, L_i), i = 1, 2, \dots, w$ . Avšak skutečnost, že  $L_i$  je nilpotentní umožňuje explicitně vyjádřit parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L_i$ . Dále ukážeme, že  $\mathcal{F}(A, B, L(m; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m))$ , kde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  jsou indexy říditelnosti dvojice  $(A, B)$ , je *lineární* varieta (tj. nadrovina) v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$  všech zpětnovazebních matic. Uvedený případ je zvláště důležitý, neboť odpovídá zákonu řízení (7.2), při němž je libovolný počáteční stav  $x_0$  převeden do počátku v minimálním počtu kroků. Takovýto zákon řízení budeme nazývat *regulátor s minimálním počtem kroků*.

## 7.1 Explicitní tvar parametrické matice

Dokážeme následující větu:

**Věta 7.1** *Matice  $Q(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times n}, m \geq k$ , ve tvaru (7.8), kde  $p_i, q_i, \dots, v_i$  a  $z_{ij}$  jsou volné parametry  $Q(\alpha)$  souhrnně označené vektorovým parametrem  $\alpha \in \mathbf{R}^r, r = mn - \nu_1 - 3\nu_2 - \dots - (2k - 1)\nu_k$ , je parametrická matice příslušná k matici  $L(k; \nu_1, \dots, \nu_k)$  ve smyslu definice 5.2.*

**Důkaz:** *Sloupce matice  $Q(\alpha)$ , jejichž pořadí v  $Q(\alpha)$  je  $1, \nu_1 + 1, \dots, \nu_1 + \dots + \nu_{k-1} + 1$  jsou lineárně nezávislé pro libovolné  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  a tedy dvojice  $(Q(\alpha), L(k; \nu_1, \dots, \nu_k))$  je pozorovatelná pro všechny  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ . Ověření druhé podmínky definice 5.2 naznačíme pro případ  $n = 5, m = 4, k = 3, \nu_1 =$*

3,  $\nu_2 = 1, \nu_3 = 1$ . V uvedeném případě je

$$L = L(3; 3, 1, 1) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & | & & \\ 0 & 0 & 1 & | & & \\ 0 & 0 & 0 & | & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & \hline & & & & & 0 \end{array} \right].$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & & & & & \\
p_1 & \dots & p_{\nu_1-\nu_2} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
q_1 & \dots & q_{\nu_1-\nu_3} & 0 & \dots & 0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{\nu_2-\nu_3} & 0 & \dots & 0 \\
s_1 & s_2 & \dots & s_{\nu_1-\nu_k} & 0 & \dots & 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{\nu_2-\nu_k} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
z_{11} & \dots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots & z_{1n} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
z_{m-k,1} & \dots & & & & & & & & & & & & & & & & & \dots & z_{m-k,n}
\end{array} \quad (7.8)$$

Libovolná matice  $Z$  zaměnitelná s  $L$  je ve tvaru

$$Z = \left[ \begin{array}{ccc|cc} a & b & c & u & v \\ & a & b & & \\ & & a & & \\ \hline & & & f & d & z \\ \hline & & & g & h & e \end{array} \right],$$

kde nevyznačené prvky  $Z$  jsou nulové. Podle (5.32) určíme, že  $\omega(Z) = \{\omega_i\}_{i=1}^n = \{1, 1, 3, 3, 3\}$ . Tvar (7.8) pro náš případ dává

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & 0 & 1 & 0 \\ q_1 & q_2 & 0 & 0 & 1 \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \end{bmatrix}.$$

Nyní snadno ověříme, že v  $i$ -tém sloupci  $Q(\alpha)$  je  $m - \omega_i = 4 - \omega_i$  volných parametrů, tedy postupně 3, 3, 1, 1, 1. Ověření pro obecný případ lze provést analogickým způsobem. //

## 7.2 Regulátor minimálního počtu kroků

Jak již bylo uvedeno, matice  $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$  realizuje regulátor minimálního počtu kroků právě tehdy, jestliže matice  $A + BF$  je podobná matici  $L \triangleq L(m; \mu_1, \dots, \mu_m)$  (viz (7.5)). Naším cílem je ukázat, že množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je nadrovina dimenze  $mn - \mu_1 - 3\mu_2 - \dots - (2m - 1)\mu_m$  v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$  všech zpětnovazebních matic.

Nejprve připomeňme, že pro říditelnou dvojici  $(A, B)$ ,  $\mu(A, B) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$ , existují regulární matice  $T$  a  $V$  takové, že

$$\bar{A} = TAT^{-1} \tag{7.9}$$

$$\bar{B} = TBV, \tag{7.10}$$

kde

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ x & \dots & \dots & \dots & x & x & \dots & \dots & \dots & x \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ & & & & & & 1 & & & \\ x & \dots & \dots & \dots & x & x & \dots & \dots & \dots & x \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ x & \dots & \dots & \dots & x & \dots & \dots & x & \dots & \dots & x \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \mu_1 \\ \} \mu_2 \\ \} \mu_m \end{array} \right\} \tag{7.11}$$

$$\bar{B} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ \hline & 0 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & & \\ \dots & & & \\ \hline & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \\ \\ \} \\ \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_m \end{array} \quad (7.12)$$

Nyní nechť  $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je matice rozdělená na bloky

$$\begin{aligned} S &= [S_{ij}], S_{ij} \in \mathbf{R}^{\mu_i \times \mu_j}, i, j = 1, 2, \dots, m \\ S_{ii} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{\mu_i \times \mu_i}, i = 1, 2, \dots, m \\ S_{ij} &= 0 \quad \text{pro } i < j \\ S_{ij} &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \dots 0 S_1 \dots S_{\mu_j - \mu_i} \end{array} \right] \quad \text{pro } i > j, \end{aligned} \quad (7.13)$$

kde  $S_1, \dots, S_{\mu_j - \mu_i}$  jsou volná blíže neurčená reálná čísla. Upozorníme na skutečnost, že  $S$  je rozdělena na bloky stejným způsobem jako  $\bar{A}$  v (7.11) a že též nenulové prvky  $S$  leží na pozicích odpovídajících nenulovým prvkům  $\bar{A}$ . Všimněme si ještě, že počet volných prvků v matici  $S$  je dán vztahem

$$\begin{aligned} q &= (\mu_1 - \mu_2) + \dots + (\mu_1 - \mu_m) + (\mu_2 - \mu_3) + \dots + (\mu_2 - \mu_m) + \dots + (\mu_{m-1} - \mu_m) = \\ &= mn - \mu_1 - 3\mu_2 - \dots - (2m - 1)\mu_m \end{aligned} \quad (7.14)$$

**Lemma 7.1** *Libovolná matice  $S$  ve tvaru (7.13) je podobná matici  $L \triangleq L(m; \mu_1, \dots, \mu_m)$  ve tvaru (7.5).*

**Důkaz:** Snadno ověříme, že  $S^i$  a  $L^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  mají stejné nenulové sloupce a že nenulové sloupce obou matic  $S^i$  a  $L^i$  jsou lineárně nezávislé. Odtud plyne, že

$$\text{rank } L^i = \text{rank } S^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.15)$$

Poněvadž  $L$  a  $S$  jsou navíc nilpotentní, je (7.15) nutná a postačující podmínka k tomu, aby  $L$  a  $S$  byly podobné matice (viz [31, str. 39]). //

Nyní označme

$$\bar{\mathcal{S}}(\bar{A}, \bar{B}) = \{\bar{F} \in \mathbf{R}^{m \times n} : \bar{A} + \bar{B}\bar{F} \text{ je ve tvaru (7.13)}\}, \quad (7.16)$$

kde  $\bar{A}$  a  $\bar{B}$  jsou ve tvaru (7.11) a (7.12). Poněvadž

$$\bar{B}\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{f}_{11} & \bar{f}_{12} & \dots & \bar{f}_{1n} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{f}_{21} & \bar{f}_{22} & \dots & \bar{f}_{2n} \\ & & & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{f}_{m1} & \bar{f}_{m2} & \dots & \bar{f}_{mn} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

je zřejmé, že volné prvky matice  $S$  ve tvaru (7.13) jednoznačně určují matici  $F$ , pro kterou platí

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = S. \quad (7.18)$$

Tedy množina  $\bar{\mathcal{S}}(\bar{A}, \bar{B})$  je jednoznačně parametrizována volnými prvky matice  $S$ . Navíc z (7.13), (7.17) a (7.18) plyne, že prvky  $\bar{f}_{ij}$  matice  $F$  závisí lineárně na volných parametrech  $S$ . Tedy  $\bar{\mathcal{S}}(\bar{A}, \bar{B})$  je nadrovina dimenze  $q$  v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ , kde  $q$  je dáno vztahem (7.14).

Nyní dokážeme, že jestliže

$$\mathcal{S}(A, B) \triangleq \{V\bar{F}T : \bar{F} \in \bar{\mathcal{S}}(\bar{A}, \bar{B}) \text{ a } V, T \text{ jsou regulární matice určené vztahy (7.9) a (7.10)}\},$$

potom platí

1.  $\mathcal{S}(A, B)$  je nadrovina dimenze  $q$  v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ , kde  $q$  je dáno vztahem (7.14)
2.  $\mathcal{S}(A, B) \subset \mathcal{F}(A, B, L)$
3.  $\mathcal{S}(A, B) \supset \mathcal{F}(A, B, L)$

První tvrzení plyne jednoduše ze skutečnosti, že  $V$  a  $T$  jsou regulární matice. Je-li  $\bar{F} \in \bar{\mathcal{S}}(\bar{A}, \bar{B})$  a  $F = V\bar{F}T(A, B)$ , potom platí

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \bar{A} + \bar{B}V^{-1}FT^{-1} = TAT^{-1} + TBVV^{-1}FT^{-1} = T(A + BF)T^{-1}.$$

Odtud a z lemmatu 7.1 plyne, že  $\mathcal{S}(A, B) \subset \mathcal{F}(A, B, L)$ , tj. druhé tvrzení. Poněvadž však  $\dim \mathcal{S}(A, B) = q$  a podle věty 5.2 je lokální dimenze  $\mathcal{F}(A, B, L)$  též rovna  $q$ , tedy zřejmě  $\mathcal{S}(A, B) \supset \mathcal{F}(A, B, L)$ . Výše dokázaná tvrzení shrneme do věty udávající hlavní výsledek této kapitoly.

**Věta 7.2** *Nechť  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , je říditelná dvojice  $\mu(A, B) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$ ,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0$  jsou indexy říditelnosti dvojice  $(A, B)$  a nechť  $L \triangleq L(m; \mu_1, \dots, \mu_m)$  je ve tvaru (7.5), potom množina  $\mathcal{F}(A, B, L)$ , tj. množina všech zpětnovazebních matic realizujících regulátor minimálního počtu kroků, je nadrovina dimenze  $q$ ,*

$$q = mn - \mu_1 - 3\mu_2 - \dots - (2m - 1)\mu_m \quad (7.19)$$

v prostoru  $\mathbf{R}^{m \times n}$ .

**Důsledek 7.1** *Nechť platí předpoklady věty 7.2 a nechť  $F_0, F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(A, B, L)$  a  $F_1 - F_0, F_2 - F_0, \dots, F_q - F_0$  jsou lineárně nezávislé matice, potom každý prvek  $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$  lze vyjádřit právě jením způsobem ve tvaru*

$$F = F_0 + \beta_1(F_1 - F_0) + \dots + \beta_q(F_q - F_0), \quad (7.20)$$

kde  $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbf{R}$ .

**Poznámka 7.1** *Vztah (7.20) udává lineární parametrizaci celé množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  pomocí minimálního počtu parametrů. Tato parametrizace je velmi výhodná pro řešení problémů existence stavové zpětné vazby s omezením na strukturu nenulových prvků realizující regulátor minimálního počtu kroků. Například požadujeme, aby prvky  $f_{i_1 j_1}, \dots, f_{i_q j_q}$  matice  $F$  ve tvaru (7.20) byly nenulové. Tato podmínka vede na soustavu lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} -f_{i_1 j_1}^{(0)} &= \beta_1 f_{i_1 j_1}^{(1)} + \beta_2 f_{i_1 j_1}^{(2)} + \dots + \beta_q f_{i_1 j_1}^{(q)} \\ -f_{i_q j_q}^{(0)} &= \beta_1 f_{i_q j_q}^{(1)} + \beta_2 f_{i_q j_q}^{(2)} + \dots + \beta_q f_{i_q j_q}^{(q)} \end{aligned} \quad (7.21)$$

pro neznámé  $\beta_1, \dots, \beta_q$ , kde  $f_{i_1 j_1}^{(0)}, \dots, f_{i_q j_q}^{(0)}$  jsou prvky matice  $F_0$  a  $f_{i_1 j_1}^{(k)}, \dots, f_{i_q j_q}^{(k)}$  jsou prvky matice  $F_k - F_0$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ . Podmínka řešitelnosti této soustavy je současně podmínkou řešitelnosti výše uvedené úlohy.

**Poznámka 7.2** *Věta 7.1 a věta 7.2 zůstávají v platnosti, jestliže jsou v nich matice  $L(k; \nu_1, \dots, \nu_k)$  a  $L(m; \mu_1, \dots, \mu_m)$  nahrazeny po řadě maticemi  $L(k; \nu_1, \dots, \nu_k) + \gamma I$  a  $L(m; \mu_1, \dots, \mu_m) + \gamma I$ , kde  $\gamma \in \mathbf{R}$  je libovolné.*

**Poznámka 7.3** Materiál uvedený v této kapitole byl poprvé publikován v autorově článku [36]. Práce [37] a [38] využívají tam uvedené výsledky k řešení některých dalších problémů syntézy.

**Příklad 7.1** Necht

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zde je  $\mu(A, B) = \{3, 1\}$ ,  $q = 2 \cdot 4 - 3 - 3 \cdot 1 = 2$ ,

$$L = L(2; 3, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r & s & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení maticové rovnice

$$AX - XL + BQ(\alpha) = 0$$

je dáno vztahem

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & -r & 2r - s - 1 & 0 \\ -r & -s + r - 1 & s - 3r + 1 & -1 \\ r - 1 & s - 3r + 1 & 5r - 3s - 3 & 1 \\ 0 & r & s - r - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\det X(\alpha) = r^2.$$

Parametrizace skoro celé množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  je podle věty 5.2 dána vztahem

$$F(\alpha) = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} 0 & -r^2 & -r^2 & -2r^2 \\ -2r^2 + s - r + 1 & r^2 - s + r - 1 & -s + 2r^2 + r - 1 & -s + 3r^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Položíme-li

$$\beta_1 = \frac{s}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}$$

$$\beta_2 = \frac{s}{r^2} + \frac{1}{r^2},$$

potom z (7.22) obdržíme lineární parametrizaci  $\mathcal{F}(A, B, L)$  (jejíž existence je zaručena větou 7.2):

$$F(\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 + \beta_1 & 1 - \beta_1 & 2 - \beta_1 & 3 - \beta_2 \end{bmatrix},$$



kde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$  jsou libovolné. Pro  $\beta_1 = 2$  a  $\beta_2 = 3$  dostáváme

$$F(2, 3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

což je matice patřící do  $\mathcal{F}(A, B, L)$  a současně obsahující maximální počet nulových prvků.

## 8 Neúplné modální přiřazení výstupní zpětnou vazbou

Až dosud jsme se zabývali přiřazením spektrálních vlastností matici dynamiky uzavřeného systému pomocí stavové zpětné vazby. Velmi často však nemáme k dispozici celý stav systému, ale pouze jeho některé složky, případně některé lineární kombinace těchto složek. V takovémto případě je přirozené řešit úlohu přiřazení alespoň určitého počtu pólů. Davison [13], (1970) ukázal, že pomocí  $p$  skalárních lineárně nezávislých výstupů lze s libovolnou přesností přiřadit  $p$  pólů, za předpokladu, že uvažovaný systém je říditelný a pozorovatelný. V této kapitole je podán nový důkaz podobného tvrzení.

Na jeho základě je navržen algoritmus výpočtu, který se velmi podobá algoritmům uvedeným v kap. 5 a má zřejmé přednosti před výpočetní metodou navrženou Davisonem [39]. Výsledky této kapitoly současně tvoří základ pro následující dvě kapitoly.

Uvažujme lineární stacionární systém

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{8.1}$$

kde  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}^p$  a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jsou reálné matice příslušných rozměrů. Užijeme-li výstupní zpětnou vazbu

$$u(t) = Ky(t),\tag{8.2}$$

potom uzavřený systém je ve tvaru

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + BKC)x(t).\tag{8.3}$$

Nechť  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ,  $s \leq p$ , je libovolná reálná matice splňující předpoklad  $\sigma(L) \cap \sigma(A) = \emptyset$ .

Definujme

$$\mathcal{K}_s(C, A, B, L) \triangleq \left\{ K \in \mathbf{R}^{m \times p} : A + BKC \text{ je podobná matici } \begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\},\tag{8.4}$$

kde \*-ky značí libovolné matice příslušných rozměrů. Naším cílem je nalézt podmínku, za níž je  $\mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  neprázdná množina pro skoro každou matici  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  a v takovémto případě nalézt vztah pro výpočet  $K \in \mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  v parametrickém tvaru.

Použitý přístup k řešení je obdobný přístupu užitého v předchozích kapitolách. Uvažujme maticovou rovnici

$$AX - XL + BH = 0,\tag{8.5}$$

kde  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ ; matice  $A$ ,  $B$ ,  $L$  mají dříve uvedený význam. Označme  $X(H) \in \mathbf{R}^{n \times s}$  jediné řešení maticové rovnice (8.5).

**Lemma 8.1** *Nechť  $(C, A, B)$ ,  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  je systém, pro který platí*

$$\text{rank}[CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \geq s, \quad (8.6)$$

*potom pro skoro každou dvojici  $(H, L)$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  platí*

$$\text{rank} CX(H) = s. \quad (8.7)$$

**Důkaz:** Podle věty 3.6 je explicitní řešení maticové rovnice (8.5) dáno vztahem

$$X(H)=[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} p_{n-1}I_m & \cdots & p_1I_m & I_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_1I_m & \ddots & & \\ I_m & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} [p_A(L)]^{-1}, \quad (8.8)$$

kde  $p_A(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_n$  je charakteristický polynom matice  $A$ . Z (8.8) plyne, že  $\text{rank} CX(H) = s$  právě tehdy, jestliže matice

$$M=[CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \begin{bmatrix} p_{n-1}I_m & \cdots & p_1I_m & I_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ p_1I_m & \ddots & & \\ I_m & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

má plnou sloupcovou hodnotu (předpokládáme  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ ). Z předpokladu (8.6) plyne, že součin  $R$  prvních dvou matic pravé strany (8.9) má hodnotu větší nebo rovnou  $s$ , tedy

$$M = R \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix}, \quad R \in \mathbf{R}^{p \times nm} \quad (8.10)$$

$$\text{rank} R \geq s \quad (8.11)$$

K dokončení důkazu stačí ukázat, že z platnosti (8.10) a (8.11) plyne, že pro skoro každou dvojici  $(H, L)$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  platí  $\text{rank} M = s$ .

Za tím účelem položíme  $a = [1, 1, \dots, 1]^T$ ,  $L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  a utvoříme posloupnost vektorů  $a_1, a_2, \dots, a_{nm} \in \mathbf{R}^s$  následovně:

$$a_1 \triangleq a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 \triangleq La = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad a_{nm} \triangleq L^{nm-1}a = \begin{bmatrix} \lambda_1^{nm-1} \\ \lambda_2^{nm-1} \\ \vdots \\ \lambda_s^{nm-1} \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

Nyní dokážeme, že lze zvolit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  tak, že libovolných  $s$  vektorů posloupnosti (8.12) je lineárně nezávislých. Uvažujme  $\binom{mn}{s}$  determinantů

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1^{i_1} & \lambda_1^{i_2} & \dots & \lambda_1^{i_s} \\ \lambda_2^{i_1} & \lambda_2^{i_2} & \dots & \lambda_2^{i_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_s^{i_1} & \lambda_s^{i_2} & \dots & \lambda_s^{i_s} \end{bmatrix} = \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_s^{i_s} + \dots, \quad (8.13)$$

kde  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq nm - 1$ . Zřejmě každý z determinantů (8.13) je roven polynomu v  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , který není identicky roven nule (snadno ověříme, že například vyznačený člen v (8.13) nemůže být zrušen). Utvoříme-li součin všech determinantů (8.13), obdržíme zřejmě opět polynom v  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , který není identicky roven nule. Tedy dále budeme předpokládat, že libovolných  $s$  vektorů posloupnosti (8.12) je lineárně nezávislých. Navíc tato vlastnost zůstane zřejmě v platnosti i při malých změnách  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ .

Nyní definujeme matici  $H = [h_1, h_2, \dots, h_m]^T$  následovně:

$$h_1 \triangleq a_1, h_2 \triangleq a_{n+1}, h_3 \triangleq a_{2n+1}, \dots, h_m \triangleq a_{(m-1)n+1}.$$

Snadno ověříme, že řádky matice

$$p \triangleq \begin{bmatrix} H \\ HL \\ \vdots \\ HL^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

jsou tvořeny právě všemi vektory posloupnosti (8.12) a tedy libovolných  $s$  řádek této matice je lineárně nezávislých. Podle Cauchyova–Binetova vzorce pro výpočet determinantů platí

$$\det \bar{M} = \sum_{k_1, \dots, k_s} \det R(j_1, \dots, j_s; k_1, \dots, k_s) \det P(k_1, \dots, k_s), \quad (8.15)$$

kde  $\bar{M} \in \mathbf{R}^{s \times s}$  je podmatice  $M$ ,  $R(j_1, \dots, j_s; k_1, \dots, k_s)$  je podmatice  $R$  obsahující řádky  $j_1, \dots, j_s$  a sloupce  $k_1, \dots, k_s$  a  $P(k_1, \dots, k_s)$  je podmatice  $P$  obsahující řádky  $k_1, \dots, k_s$ . Z (8.11) a z vlastností matice  $P$  plyne, že pro vhodný výběr řádkových indexů  $j_1, \dots, j_s$  je alespoň jeden člen v rozvoji (8.15) různý od nuly. Na základě vlastností  $P$  dále snadno ověříme, že tento člen nemůže být identicky zrušen některým dalším členem rozvoje (8.15). Tedy případnou malou změnou  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  lze dosáhnout toho, že  $\det \bar{M} \neq \emptyset$ . Tedy  $\text{rank } M \geq s$ . //

**Věta 8.1** *Nechť  $(C, A, B)$ ,  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ . Jestliže*

$$\text{rank} [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \geq s, \quad (8.16)$$

*potom platí*

(i) Množina  $\mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  je neprázdná pro skoro každou matici  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ .

(ii) Necht

$$K = K(H, \hat{K}) \triangleq H[(CX(H))^T CX(H)]^{-1}(CX(H))^T + \hat{K}, \quad (8.17)$$

kde  $X(H)$  je řešení maticové rovnice (8.5) a  $\hat{K} \in \mathbf{R}^{m \times p}$  je libovolná matice splňující podmínku  $\hat{K}CX(H) = 0$ , potom vztah (8.17) má smysl pro skoro každou dvojici  $H \in \mathbf{R}^{m \times s}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  a matice  $K$  definovaná tímto vztahem patří do  $\mathcal{K}_s(C, A, B, L)$ .

**Důkaz:** Podle lemmatu 8.1 je  $\text{rank } CX(H) = s$  pro skoro každou dvojici  $(H, L)$ ; tedy inverze matice  $(CX(H))^T CX(H)$  vyskytující se v (8.17) je definována též pro skoro každou dvojici  $(H, L)$ . Dále je-li  $K$  ve tvaru (8.17), potom platí

$$(A + BKC)X(H) = AX(H) + BH[CX(H)^T CX(H)]^{-1}(CX(H))^T CX(H) + B\hat{K}CX(H) = AX(H) + BH = X(H)L.$$

Odtud plyne, že  $\text{Im } X(H)$  je invariantní podprostor matice  $A + BKC$  a zobrazení reprezentované maticí  $A + BKC$  má tedy ve vhodné bázi maticovou reprezentaci  $\begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ .

Odtud plyne, že  $K \in \mathcal{K}_s(C, A, B, L)$ . Tím jsme dokázali obě tvrzení věty. //

**Poznámka 8.1** Tvrzení (i) věty 8.1 implikuje, že pro skoro každou symetrickou<sup>5</sup> množinu  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  komplexních čísel existuje matice  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$  taková, že  $\Lambda \subset \sigma(A + BKC)$ .

**Poznámka 8.2** Věta (8.1) zesiluje Davisonův výsledek [13] ve dvou směrech:

1. Pro platnost tvrzení (i) nevyžaduje, aby systém  $(C, A, B)$  byl úplný, tj. současně říditelný i pozorovatelný.

2. Vztah (8.17) dává jistou volnost ve výběru  $K(H, \hat{K}) \in \mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  v závislosti na volbě  $H$  a  $\hat{K}$ . Ve srovnání s Davisonovým algoritmem je tato volnost obecně větší. Nicméně otázku parametrizace celé množiny  $\mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  věta 8.1 neřeší. Snadno lze však ukázat, že libovolný prvek  $K \in \mathcal{K}_s(C, A, B, L)$  lze vyjádřit ve tvaru

$$K = K(H, \hat{K}) = H[CX(H)]^P + \hat{K}, \quad (8.18)$$

<sup>5</sup>Množinu  $\Lambda$  nazýváme symetrickou, jestliže  $\sigma + i\omega \in \Lambda$  implikuje  $\sigma - i\omega \in \Lambda$ .

kde jednotlivé symboly mají stejný význam jako ve větě 8.1 a  $[CX(H)]^P$  značí pseudoinverzní matici ve smyslu Penrose–Moore. Bohužel však ne každá matice  $K$  ve tvaru (8.18) patří do  $\mathcal{K}_s(C, A, B, L)$ .

**Poznámka 8.3** Uvažujme speciální případ, kdy počet výstupů  $p$  systému  $(C, A, B)$  je roven dimenzi  $s$  matice  $L$ , tj.  $p = s$  a nechť

$$\text{rank}[CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] = s,$$

potom (8.17) přejde na

$$K = K(H) = H[CX(H)]^{-1}. \quad (8.19)$$

**Poznámka 8.4** V (8.17) a (8.19) lze podobně jako v kapitole 5 redukovat počet návrhových parametrů obsažených v matici  $H$ . Uvažujme například vztah (8.19) pro  $H = \bar{H}Z$ , kde  $Z \in \mathcal{Z}(L)$ , potom platí

$$K(H) = H[CX(H)]^{-1} = \bar{H}Z[CX(\bar{H})Z]^{-1} = \bar{H}ZZ^{-1}[CX(\bar{H})]^{-1} = K(\bar{H})$$

Tedy podle lemmatu 5.4 lze bez praktického snížení volnosti v návrhu nahradit matici  $H$  v (8.17) a (8.19) parametrickou maticí  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ .

Na základě věty 8.1 a poznámky 8.4 je sestaven následující algoritmus pro výpočet skoro každé  $K \in \mathcal{K}_s(C, A, B, L)$ , v němž  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  a  $\hat{K}$  jsou vektorové návrhové parametry.

**Algoritmus 8.1 :**

*Krok 1:* Urči  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ ,  $s < n$ ,  $\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset$ , v reálném Jordanově tvaru.

*Krok 2:* Urči parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ .

*Krok 3:* Zvol  $\alpha \in \mathbf{R}^r$  náhodně (nebo jinak).

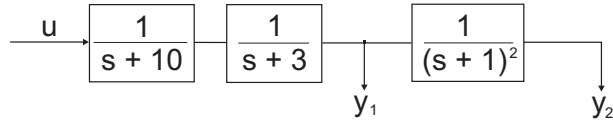
*Krok 4:* Nalezni řešení  $X(\alpha)$  maticové rovnice  $AX - XL + BQ(\alpha) = 0$ . Jestliže platí (8.16), potom s pravděpodobností jedna platí  $CX(\alpha) = s$ .

*Krok 5:* Zvol  $\hat{K} \in \mathbf{R}^{m \times p}$  tak, že platí  $\hat{K}CX(\alpha) = 0$ . (V tomto kroku máme  $m(p - s)$  stupňů volnosti ve výběru  $\hat{K}$  viz poznámku 6.1.)

*Krok 6:* Vypočti  $K(\alpha, \hat{K}) = Q(\alpha)[(CX(\alpha))^T CX(\alpha)]^{-1}(CX(\alpha))^T + \hat{K}$ .

**Příklad 8.1** Uvažujme systém podle obr. 8.1. Jeho stavový popis je

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



obr. 8.1

Požadujeme nalézt statickou zpětnou vazbu od výstupu, jmenovitě od  $y_1$  a  $y_2$  tak, aby mezi póly uzavřeného systému byly póly  $-2$  a  $-2.5$ . Tedy zvolme

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad Q = [1, 1]$$

a uijme algoritmus 8.1. Řešení maticové rovnice

$$AX - XL + BQ = 0$$

je

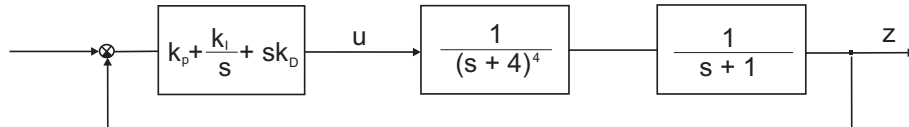
$$X = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.133 \\ 0.125 & 0.266 \\ -0.125 & -0.177 \\ 0.125 & 0.1851852 \end{bmatrix}$$

a požadovanou zpětnou vazbu  $K$  určíme podle vztahu

$$K = Q[CX]^{-1} = [0.35 \quad 0.65].$$

Póly uzavřeného systému jsou  $-10.0627$ ,  $-2.5$ ,  $-2.0$ ,  $-0.43625$ .

**Příklad 8.2** Uvažujme regulační obvod znázorněný na obr. 8.2, který se skládá z řízeného systému s přenosem  $\frac{1}{(s+4)^4(s+1)}$  a PID regulátoru.



obr. 8.2

Naším cílem je určit parametry regulátoru  $k_p$ ,  $k_I$  a  $k_D$  tak, aby uzavřený regulační obvod měl tři zadané dominantní póly. Snadno se přesvědčíme, že tato úloha lze převést na následující modální úlohu řešenou v této kapitole.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{8.20}$$

kde  $y = [z(t), \int_0^t z(\tau)d\tau, \frac{d}{dt}z(t)]^T$  a  $z(t)$  a  $u(t)$  mají stejný význam jako na obr. 8.2. Statická zpětná vazba  $K$  od výstupu  $y$  systému (8.20) obsahuje jako své prvky parametry regulátoru  $k_p$ ,  $k_I$  a  $k_D$ . Konkrétně

$$K = [-k_p, -k_I, -k_D].$$

Nalezneme-li tedy zpětnovazební matici  $K$ , která přiřazuje zadané dominantní póly systému (8.20) máme vyřešenou i původní úlohu. Užitím algoritmu 8.1 pro systém  $(C, A, B)$  a

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad Q = [111]$$

obdržíme

$$K = [-306.475 \quad -218.225 \quad -94.3069]$$

tj.

$$k_p = 306.475; \quad k_I = 218.225; \quad k_D = 94.3069.$$

Póly uzavřeného systému jsou  $-5.906 \pm i 2.082$ ;  $-1.288$ ;  $-1.5$ ;  $-1.2 \pm i 1.2$ .



## 9 Úplné přiřazení pólů výstupní zpětnou vazbou

V této kapitole uijeme výsledky předchozí kapitoly k úplnému přiřazení pólů pomocí výstupní zpětné vazby. Přesná formulace této úlohy je následující:

Je dán systém  $(C, A, B)$ ,  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  a symetrická množina  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$   $n$  komplexních čísel. Nalezněte zpětnovazební matici  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$  takovou, že platí

$$\sigma(A + BKC) = \Lambda. \quad (9.1)$$

Pro splnění podmínky (9.1) pro libovolnou  $\Lambda$  je zřejmě nutné, aby platilo  $mp \geq n$ . Bohužel tato podmínka (při omezení na reálné matice  $K$ ) není postačující [17]. Kimura však dokázal následující větu [18], (1975).

**Věta 9.1** *Nechť systém  $(C, A, B)$ ,  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\text{rank } C = p$ ,  $\text{rank } B = m$ , je říditelný a pozorovatelný a nechť platí*

$$m + p - 1 \geq n, \quad (9.2)$$

*potom pro skoro každou symetrickou množinu  $\Lambda$   $n$  komplexních čísel existuje  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$  takové, že  $\sigma(A + BKC) = \Lambda$ .*

Algoritmy pro výpočet  $K$  splňující podmínku (9.1) jsou uvedeny například v [19], [20], [40]. Společná základní idea těchto algoritmů spočívá v tom, že přiřazení pólů se provádí ve dvou krocích; v prvním kroku přiřadíme část pólů a ve druhém kroku přiřadíme zbývající póly, přičemž póly přiřazené v prvním kroku nezměníme. V obou krocích se k přiřazení používá zpětnovazební matice s jednotkovou hodnotou a tedy pro výslednou matici  $K$  platí  $\text{rank } K \leq 2$ . Tato skutečnost (v případě  $\min(p, m) > 2$ ) omezuje podstatným způsobem třídu matic  $K$ , které mohou být těmito algoritmy určeny.

Cílem této kapitoly je návrh nového algoritmu řešícího problém přiřazení všech pólů výstupní zpětnou vazbou za podmínky (9.2), který nemá výše uvedené omezení, tj. hodnota výpočetní matice  $K$  je omezena pouze podmínkou  $\text{rank } K \leq \max(p, m)$ .

V dalším budeme předpokládat, že  $\sigma(A) \cap \Lambda = \emptyset$  a že  $\Lambda$  může být rozložena na dvě symetrické množiny  $\Lambda_1$  a  $\Lambda_2$  obsahující po řadě  $p - 1 \geq 1$  a  $m$  komplexních čísel. Poznamenejme, že lze ukázat, že tyto předpoklady neomezují obecnost řešeného problému. Dále budeme předpokládat, že jsou splněny všechny předpoklady věty 9.1. Nejprve navrhne algoritmus ve formě vhodné pro jeho ověření.

**Algoritmus 9.1 :**

*Krok 1:* Urči  $K_1 \in \mathcal{K}_{p-1}(C, A, B, L_1)$ , kde  $L_1 \in \mathbf{R}^{(p-1) \times (p-1)}$  je taková, že  $\sigma(L_1) = \Lambda_1$ .

*Krok 2:* Polož  $A_1 = A + BK_1C$  a urči  $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^p$  tak, že všechna vlastní čísla matice  $A_1$  patřící do  $\Lambda_1$  jsou pro dvojici  $(\xi^T C, A_1)$  nepozorovatelná a ostatní vlastní čísla  $A_1$  jsou pro dvojici  $(\xi^T C, A_1)$  pozorovatelná.

*Krok 3:* Urči  $K_2^T \in \mathcal{K}_m(B^T, A_1^T, C^T \xi, L_2)$ , kde  $L_2 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  je taková, že  $\sigma(L_2) = \Lambda_2$ .

*Krok 4:* Urči  $K = K_1 + K_2 \xi^T$ .

Platí následující věta:

**Věta 9.2** *Za výše uvedených předpokladů mají všechny kroky algoritmu 9.1 řešení pro skoro každou symetrickou množinu  $\Lambda$  a matice  $K$  určená tímto algoritmem splňuje podmínku (9.1).*

**Důkaz:** Podle věty 8.1 má krok 1 a krok 3 za uvedených předpokladů řešení pro skoro každé  $L_1$  a  $L_2$ , tj. pro skoro každou symetrickou množinu  $\Lambda$ . Poněvadž krok 4 je triviální, zbývá ukázat, že též krok 2 má řešení pro skoro každou symetrickou množinu  $\Lambda$ . Za tím účelem předpokládejme bez omezení obecnosti<sup>6</sup>, že  $A_1$  má vesměs různá vlastní čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ . Nechť  $v_1, v_2, v_{p-1}$  a  $w_1, w_2, \dots, w_m$  jsou vlastní vektory příslušné po řadě k vlastním číslům  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$  a  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ . Podmínky kladené na vektor  $\xi \in \mathbf{R}^p$  v kroku 2 lze nyní vyjádřit takto:

$$\xi^T C v_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1 \quad (9.3)$$

a

$$\xi^T C w_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.4)$$

Soustava (9.3) má zřejmě vždy řešení  $\xi \neq 0$ , jestliže neexistuje žádné takové řešení splňující současně (9.4), stačí provést malou změnu v  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ , abychom dosáhli i platnosti (9.4). Přesný důkaz posledního tvrzení je komplikovaný, ačkoliv intuitivně je věc zřejmá. Ověření skutečnosti, že matice  $K$  určená algoritmem 9.1 je jednoduché. //

Nyní uvedeme podrobný algoritmus realizující kroky 1 - 4 algoritmu 9.1 pomocí věty 8.1 a algoritmu 8.1.

---

<sup>6</sup>Jestliže  $(C, A, B)$  je říditelný a pozorovatelný, potom pro skoro každé  $K \in \mathbf{R}^{m \times p}$  má matice  $A + BKC$  vesměs různá vlastní čísla [49].

**Algoritmus 9.2 :**

*Krok 1:* Urči  $L_1 \in \mathbf{R}^{(p-1) \times (p-1)}$  v reálném Jordanově tvaru tak, že  $\sigma(L_1) = \Lambda_1$ .

*Krok 2:* Urči parametrickou matici  $Q_1(\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times (p-1)}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}^{r_1}$  příslušnou k  $L_1$ .

*Krok 3:* Zvol  $\alpha \in \mathbf{R}^{r_1}$  náhodně (nebo jinak).

*Krok 4:* Nalezni řešení  $X_1(\alpha) \in \mathbf{R}^{n \times (p-1)}$  maticové rovnice

$$AX_1 - X_1L_1 + BQ_1(\alpha) = 0.$$

*Krok 5:* Vypočti  $K_1 = K_1(\alpha) = Q_1(\alpha)[(CX_1(\alpha))^T CX_1(\alpha)]^{-1}(CX_1(\alpha))^T$ .

*Krok 6:* Urči řešení soustavy lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_i^T X_1(\alpha) \xi_i = -C_p^T X_1(\alpha) \xi_p$$

pro neznámé  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ , kde  $\xi_p \neq 0$  je libovolná konstanta např.  $\xi_p = 1$  a  $C_i^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  jsou řádky matice  $C$ . Polož  $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p]$ .

*Krok 7:* Urči  $L_2 \in \mathbf{R}^{m \times m}$  v reálném Jordanově tvaru tak, že  $\sigma(L_2) = \Lambda_2$ .

*Krok 8:* Polož  $h = [1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^m$ ,  $A_1 = A + BK_1C$ .

*Krok 9:* Nalezni řešení  $X_2$  maticové rovnice

$$A_1^T X_2 - X_2 L_2 + C^T \xi h^T = 0.$$

*Krok 10:* Vypočti  $\xi K_2^T = \xi h^T (B^T X^2)^{-1}$ .

*Krok 11:* Vypočti  $K = K(\alpha) = K_1 + K_2 \xi^T$ .

**Poznámka 9.1** Snadno lze ověřit, že celý zdroj volnosti ve výběru matice  $K$  spočívá ve výběru návrhového parametru  $\alpha \in \mathbf{R}^{r_1}$ . Tedy jestliže  $L_1$  je cyklická matice, potom algoritmus 9.2 nabývá  $r_1$  stupňů volnosti ve výběru matice  $K$ , kde  $r_1$  je dáno vztahem

$$r_1 = (m-1)(p-1). \quad (9.5)$$

Jestliže navíc platí  $m+p-1 = n$ , potom je

$$r_1 = (m-1)(p-1) = mp - (m+p-1) = mp - n,$$

tj. počet stupňů volnosti ve výběru  $K$  je o  $n$  menší, než je počet prvků matice  $K$ . Z této skutečnosti lze usuzovat, že algoritmem 9.2 lze určit všechny (nebo alespoň skoro všechny)  $K$  splňující požadavek  $\sigma(A + BKC) = \Lambda$  za předpokladu, že  $m+p-1 = n$ .

Je zajímavé, že jestliže použijeme algoritmus 9.2 pro systém  $(B^T, A^T, C^T)$  obdržíme stejný počet stupňů volnosti ve výběru  $K^T$ .

**Poznámka 9.2** V kroku 5 a 10 algoritmu 9.2 může dojít k potížím při výpočtu inverzní matice. Jestliže je příslušná matice v kroku 5 singularní a nebo blízká k singularní matici, potom je nutný návrat na krok 3. Jestliže podobná situace nastane v kroku 10, je vhodné se vrátit nejprve zpět na krok 3 a jestliže to nepomůže, je nutné provést malou změnu v požadovaných pólech  $\Lambda$  a opakovat celý výpočet.

**Poznámka 9.3** Jestliže  $m + p - 1 < n$  můžeme algoritmus 9.2 využít k přiřazení  $m + p - 1$  pólů, ačkoliv v tomto případě může algoritmus selhat i po modifikaci  $\Lambda$ . Selhání algoritmu je však velmi nepravděpodobné [19].

**Poznámka 9.4** Algoritmus 9.2 může být užit k úplnému přiřazení pólů pomocí dynamického kompenzátoru. Jestliže je totiž  $m + p - 1 < n$ , rozšířením systému  $(A, B, C)$  o kompenzátor řádu  $q$  se zvětší počet vstupů, počet výstupů a řád systému o  $q$ . Tedy podmínka pro využitelnost algoritmu 9.2 pro úplné přiřazení je

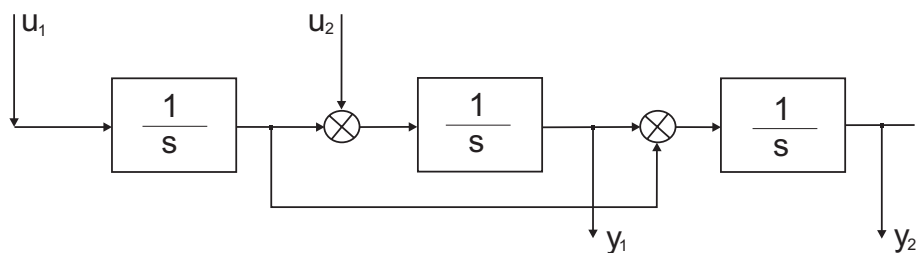
$$m + q + p + q - 1 \geq n + q$$

neboli

$$m + p + q \geq n + 1.$$

Odtud plyne, že řád kompenzátoru  $q$  musí být alespoň  $n - m - p + 1$ .

**Příklad 9.1** Uvažujme systém (obr. 9.1),



obr. 9.1

jehož stavový popis je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

kde  $x \in \mathbf{R}^3$ ,  $u \in \mathbf{R}^2$ ,  $y \in \mathbf{R}^2$  a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poněvadž  $m + p - 1 = 2 + 2 - 1 = 3 \geq n = 3$ , lze využít algoritmus 9.2 k úplnému přiřazení pólů. Necht požadované póly jsou  $-1$ ;  $-1 \pm i$ , potom

algoritmus 9.2 udává následující postup:

*Krok 1:*  $L_1 = [-1]$

*Krok 2:*  $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$

*Krok 3:*  $\alpha = 0$

*Krok 4:* Řešení maticové rovnice  $AX_1 - X_1L_1 + BQ_1(\alpha) = 0$  je ve tvaru

$$X_1(\alpha) = [1, -(1 - \alpha), -\alpha]^T$$

*Krok 5:*  $K_1 = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2} \begin{bmatrix} 1 & -(1-\alpha) \\ \alpha & -\alpha(1-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

*Krok 6:*  $\xi^T = [(1 - \alpha), 1] = [1, 1]$

*Krok 7:*  $L_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

*Krok 8:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{1+(1-\alpha)^2} & \frac{-(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)^2} & 1 \\ \frac{\alpha}{1+(1-\alpha)^2} & \frac{-\alpha(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)^2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Krok 9:* Řešení maticové rovnice  $A_1^T X_2 - X_2 L_2 + C^T \xi h^T = 0$  je pro  $\alpha = 0$  ve tvaru

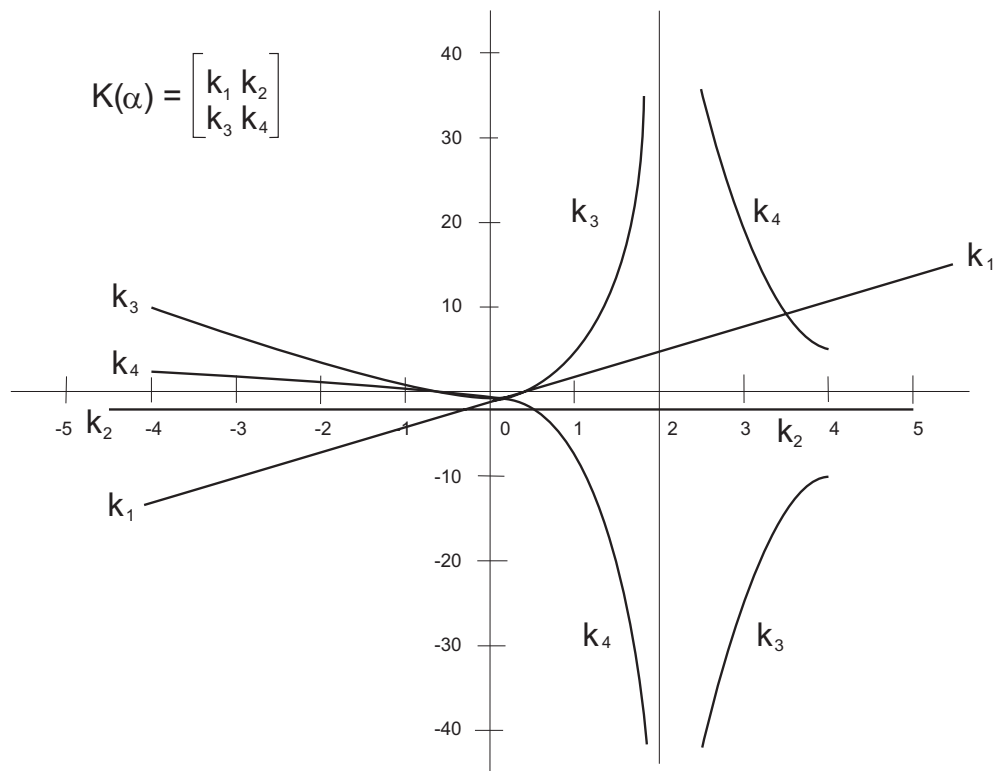
$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.1538 & -0.769 \\ -0.1538 & -0.769 \\ -0.6153 & 0.923 \end{bmatrix}$$

*Krok 10:*  $\xi K_2^T = \begin{bmatrix} -2.5 & -1 \\ -2.5 & -1 \end{bmatrix}$

*Krok 11:* Hledaná výstupní zpětná vazba je

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zvolíme-li v kroku 3 jinou hodnotu pro návrhový parametr  $\alpha$ , obdržíme samozřejmě jinou zpětnovazební matici  $K$ . Na obr. 9.2 je znázorněna závislost prvků matice  $K$  na návrhovém parametru  $\alpha$ .



obr. 9.2

## 10 Přřazení pólů pomocí dynamického kompenzátora

V této kapitole ukážeme, jak lze využít výsledků kapitoly 8 k návrhu dynamického kompenzátora metodou, kterou navrhli Ahmari a Vacroux [41].

Uvažujme spojitý říditelný a pozorovatelný systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{10.1}$$

kde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  je cyklická matice,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  a  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ . Zvolme vektor  $b \in \text{Im } B$  takový, že  $(C, A, b)$  je říditelný a pozorovatelný systém (to lze za uvedených předpokladů vždy provést [28]) a uvažujme zpětnovazební systém tvořený systémem  $(C, A, b)$  a kompenzátorem řádu  $q$  ve tvaru

$$v(q) + \sum_{i=0}^{q-1} A_i v^{(i)} = - \sum_{i=0}^q B_i y_{(i)},\tag{10.2}$$

kde  $A_i$  jsou konstanty a  $B_i$  jsou řádkové vektory dimenze  $p$ . Tento zpětnovazební systém je tedy popsán následovně:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bv_1 \\ \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= v_3 \\ &\vdots \\ \dot{v}_q &= w \\ w &= - \sum_{i=0}^{q-1} A_i v_{i+1} - \sum_{i=0}^q B_i y_{(i)}\end{aligned}\tag{10.3}$$

Dosadíme-li do (10.3) za  $y_{(i)}$  z (10.1) obdržíme:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}w \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x} \\ w &= \bar{K}\bar{y},\end{aligned}\tag{10.4}$$

kde

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & F \end{array} \right] \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \left[ \begin{array}{c|c} \bar{C}_1 & \\ \hline 0 & -I_q \end{array} \right] \\ \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \\ -CA & -Cb & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -CA^q & -CA^{(q-1)}b & -Cb \end{bmatrix}\end{aligned}$$

a

$$\bar{K} = [B_0 B_1 \dots B_q A_0 A_1 \dots A_{q-1}].$$

Všimněme si, že rovnice (10.4) představují říditelný a pozorovatelný systém  $(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ , u kterého je zavedena statická výstupní zpětná vazba  $\bar{K}$  a že všechny prvky  $\bar{K}$  jsou přímo tvořeny parametry kompenzátoru (10.2). Tedy výpočet parametrů kompenzátoru je převeden na výpočet statické výstupní zpětné vazby. Snadno ověříme, že

$$s \triangleq \text{rank } \bar{C} = q + \text{rank} [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^q C^T]. \quad (10.5)$$

Podle věty 8.1 lze tedy s libovolnou přesností přiřadit  $s$  předepsaných pólů uzavřeného systému (10.4) pomocí výstupní zpětné vazby  $\bar{K}$ . Příslušný výpočet  $\bar{K}$  můžeme provést algoritmem 8.1.

**Poznámka 10.1** Jestliže  $q = \min(q_c, q_0)$ , kde  $q_c$  a  $q_0$  jsou po řadě nejmenší přirozená čísla taková, že

$$\text{rank} [B, AB, \dots, A^{q_c} B] = n \quad (10.6)$$

$$\text{rank} [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{q_0} C^T] = n, \quad (10.7)$$

potom podle výše uvedeného existuje kompenzátor řádu  $q$  takový, že  $q + n$  pólů uzavřeného systému může být přiřazeno s libovolnou přesností. Toto tvrzení dokázali Brash a Pearson [12]. Poznamenejme, že čísla  $q_c + 1$  a  $q_0 + 1$  se nazývají po řadě index říditelnosti a index pozorovatelnosti systému  $(C, A, B)$ .



**Poznámka 10.2** Jak bylo uvedeno v poznámce 9.4, algoritmus 9.2 umožňuje přiřazení všech pólů uzavřeného systému pomocí kompenzátoru řádu  $q_1 = n - m - p + 1$ . Metoda popsaná v této kapitole umožňuje stejné přiřazení provést pomocí kompenzátoru řádu  $q_2 = \min(q_c, q_0)$ , kde  $q_c$  a  $q_0$  je  $q_2^* = \min([\frac{n}{m}] - 1, [\frac{n}{p}] - 1)$ , kde  $[x]$  značí nejmenší celé číslo větší nebo rovné  $x$ . Porovnání  $q_1$  a  $q_2^*$  je pro systém 8. řádu uvedeno v následující tabulce. V orámované části tabulky platí  $q_1 < q_2^*$ .

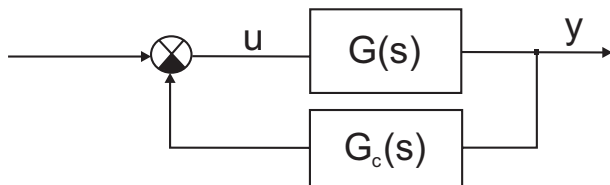
n=8

$\begin{matrix} m \\ p \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$q_1=7$ $q_2^*=7$	6 3	5 2	4 1	3 1	2 1	1 1	0 0
2	6 3	5 3	4 2	3 1	2 1	1 1	0 1	0 0
3	5 2	4 2	3 2	2 1	1 1	0 1	0 1	0 0
4	4 1	3 1	2 1	1 1	0 1	0 1	0 1	0 0
5	3 1	2 1	1 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0
6	2 1	1 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0
7	1 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 0
8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

**Příklad 10.1** Necht' přenos řízení soustavy je  $G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$ . Máme navrhnout dynamický kompenzátor  $G_C(s)$  1. řádu

$$G_C(s) = \frac{B_1s + B_0}{s + A_0}$$

tak, aby všechny tři póly zpětnovazební smyčky znázorněné na obr. 10.1 ležely v zadaných bodech komplexní roviny.



obr. 10.1

Stavový model přenosu  $G(s)$  je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (10.8)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -25 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2500 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [01]. \end{aligned}$$

V příslušném systému (10.4) mají matice  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  a  $\bar{C}$  následující tvar

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} -25 & 0 & 2500 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Požadujeme-li póly  $-50$ ;  $-30 \pm i 50$ , obdržíme

$$\bar{K} = [B_0 B_1 A_0] = [68.0 \ 1.71 \ 85.0].$$

Tedy hledaný kompenzátor je ve tvaru

$$G_C(s) = \frac{1.71s + 68}{s + 85} = \frac{1}{1.25} \frac{1 + 0.025147s}{1 + 0.011764s}.$$

## 11 Numerické algoritmy

V této kapitole se budeme zabývat numerickou realizací dříve navržených algoritmů pro výpočet zpětnovazebních matic. Jádrem navržených algoritmů je vždy řešení Sylvesterovy maticové rovnice. Z tohoto důvodu uvedeme tři numerické metody pro řešení této rovnice. Prvé dvě jsou převzaté z literatury a jsou obecně považovány za to nejlepší, co existuje. Třetí metoda sice nesplňuje všechny požadavky na kvalitní numerický algoritmus, zato je však velmi jednoduše programovatelná a hodí se tedy i pro malé osobní počítače. Nakonec popíšeme numerický algoritmus a jeho programovou realizaci pro výpočet stavové nebo výstupní zpětné vazby na základě modálních požadavků. Nejprve se však budeme zabývat otázkou podmíněnosti řešení Sylvesterovy rovnice.

### 11.1 Podmíněnost řešení Sylvesterovy rovnice

Chceme-li zkoumat vliv nepřesností ve vstupních datech a vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledcích při jakémkoliv výpočtu, je nutné zkoumat tzv. podmíněnost úlohy, kterou řešíme. Připomeňme, že úlohu nazýváme dobře podmíněnou, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení. Tedy podmíněnost úlohy je nezávislá na konkrétní (numerické) realizaci algoritmu řešícího tuto úlohu.

Uvažujme maticovou rovnici

$$AX - XL + R = 0, \quad (11.1)$$

kde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$ . Podle věty 3.3 ji lze přepsat na ekvivalentní tvar

$$P[X]_s = -[R]_s, \quad (11.2)$$

kde

$$P = (A \otimes I_s) - (I_n \otimes L^T) \quad (11.3)$$

a  $[X]_s$  ( $[R]_s$ ) značí jednosloupcové matice utvořené tak, že sloupce matice  $X$  ( $R$ ) dáme pod sebou do jednoho sloupce. Symbol  $\otimes$  značí operátor pro tenzorový součin matic. Na základě znalostí citlivosti lineárních soustav víme, že jestliže  $P$  je špatně podmíněná matice (tj. číslo  $K_2(P) = \|P\| \|P^{-1}\|$ , kde  $\|\cdot\|$  značí spektrální normu matice, je velké), potom malé změny v  $A$ ,  $L$  a  $R$  mohou způsobit velké změny v řešení. Označíme-li

$$\Phi(X) = AX - XL \quad (11.4)$$

a definujeme-li normu v prostoru lineárních transformací z  $\mathbf{R}^{n \times s}$  do  $\mathbf{R}^{n \times s}$  předpisem

$$f : \mathbf{R}^{n \times s} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times s}, \quad \|f\| = \max_{X \in \mathbf{R}^{n \times s}} \frac{\|f(X)\|_E}{\|X\|_E},$$

kde  $\| \cdot \|$  značí euklidovskou normu (tj.  $\| w \|_E^2 = \sum_{i,j} |w_{ij}|^2$ ), potom platí

$$\| \Phi \| = \| P \| \leq \| A \| + \| L \|, \quad (11.5)$$

kde  $\| \cdot \|$  značí spektrální normu a  $P$  je definováno vztahem (11.3). Jestliže  $\Phi$  je regulární, potom

$$\| \Phi^{-1} \| = \left[ \min_{X \in \mathbf{R}^{n \times s}} \frac{\| \Phi(X) \|_E}{\| X \|_E} \right]^{-1} = \| P^{-1} \|. \quad (11.6)$$

Nyní uvažujme výpočet řešení maticové rovnice (11.1) na počítači se strojovou přesností  $\varepsilon$ . V takovémto případě lze očekávat zaokrouhlovací chyby řádu  $\varepsilon \| A \|_E$ ,  $\varepsilon \| L \|_E$  a  $\varepsilon \| R \|_E$  ve vstupních datech matic  $A$ ,  $L$  a  $R$  dokonce před započítím jakýchkoliv výpočtů. Tedy v nejlepším případě jsme schopni určit řešení  $\hat{X}$ , které splňuje maticovou rovnici

$$(A + E)\hat{X} - \hat{X}(L + F) + (R + G) = 0,$$

kde

$$\| E \|_E \leq \varepsilon \| A \|_E \quad (11.7)$$

$$\| F \|_E \leq \varepsilon \| L \|_E \quad (11.8)$$

$$\| G \|_E \leq \varepsilon \| R \|_E. \quad (11.9)$$

Ptáme se, jak přesné by mohlo být takové  $\hat{X}$ ? Užitím standardní perturbační analýzy [42] je možné dokázat následující výsledek.

**Věta 11.1** *Nechť  $AX - XL + R = 0$ ,  $(A + E)\hat{X} + \hat{X}(L + F) + (R + G) = 0$ ,  $\Phi(Z) = AZ - ZL$  je regulární,  $R$  je nenulové, (11.7) - (11.9) platí a*

$$\varepsilon [\| A \|_E + \| L \|_E] \| \Phi^{-1} \| \leq \frac{1}{2}, \quad (11.10)$$

potom

$$\frac{\| X - \hat{X} \|_E}{\| X \|_E} \leq 4\varepsilon [\| A \|_E + \| L \|_E] \| \Phi^{-1} \|. \quad (11.11)$$

Vztah 11.11 udává odhad pro relativní chybu řešení  $\hat{X}$ . Obecně lze říci, že při náhodném charakteru zaokrouhlovacích chyb lze očekávat chybu řádu  $\varepsilon \| \Phi^{-1} \|$ . Odhad  $\| \Phi^{-1} \|$  je tady velmi cenný pro posouzení přesnosti v praktických výpočtech. Nejlepší, avšak též nejnákladnější způsob odhadu je singulární dekompozice matice  $P = A \otimes I_s - I_n \otimes L^T$  užitím podprogramu SVD z EISPACKu [43]. Méně nákladné je využití různých odhadů čísla podmíněnosti matice  $P$  [44]. Nejprístupnější je odhadnout podmíněnost

$P$  pomocí vlastních čísel matice  $A$  a  $L$ . Vlastní čísla matice  $P$  jsou ve tvaru  $\lambda_i^A - \lambda_j^L$ , kde  $\lambda_i^A \in \sigma(A)$  a  $\lambda_j^L \in \sigma(L)$ , a tedy

$$\bar{K}(A, L) = \frac{\max_{i,j} |\lambda_i^A - \lambda_j^L|}{\min_{i,j} |\lambda_i^A - \lambda_j^L|} \quad (11.12)$$

není příliš velké (ve srovnání s  $\varepsilon$ ) lze usuzovat, že  $P$  není špatně podmíněná. Poznamenejme, že 11.12 odpovídá tzv. Toddovu číslu podmíněnosti viz. [45, str. 137].

## 11.2 Numerické řešení Sylvesterovy rovnice

Pro řešení maticové rovnice

$$AX - XL + R = 0, \quad (11.13)$$

kde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  a  $R \in \mathbf{R}^{n \times s}$ , existuje celá řada metod, avšak pouze některé vedou na stabilní numerický algoritmus. Například metody založené na různých explicitních vztazích pro řešení (11.13) a nebo metody užívající transformaci  $A$  a  $L$  na diagonální, Jordanovu a nebo Frobeniovu formu, nemají tyto požadované vlastnosti. V současnosti se za nejlepší považují algoritmy navržené v [46], tzv. Bartels–Stewartův algoritmus, a v [47], tzv. Hessenberg–Schurův algoritmus, které jsou velice podobné a oba jsou založené na ekvivalenci maticových rovnic (11.13) a

$$(U^{-1}AU)(U^{-1}XV) - (U^{-1}XV)(V^{-1}LV) + U^{-1}RV = 0, \quad (11.14)$$

kde  $U$  a  $V$  jsou regulární matice příslušných rozměrů. Tyto algoritmy obsahují následující čtyři kroky:

*Krok 1:* Transformuj  $A$  a  $L$  do “jednoduché formy” pomocí podobnostních transformací

$$\begin{aligned} A' &= U^{-1}AU \\ L' &= V^{-1}LV. \end{aligned}$$

*Krok 2:* Nalezni řešení  $UR' = RV$  pro neznámou  $R'$ .

*Krok 3:* Řeš transformovanou maticovou rovnici

$$A'X' - X'L' = R'$$

pro neznámou  $X'$ .

*Krok 4:* Nalezni řešení  $XV = UX'$  pro neznámou  $X$ .

V krocích 2 a 4 jsou řešeny soustavy lineárních rovnic, které obsahují transformační matice  $U$  a  $V$ . Tyto soustavy budou dobře podmíněné jen v tom

případě, že matice  $U$  a  $V$  jsou dobře podmíněné. Bohužel většina vhodných transformací (např. vedoucích na Jordanovu nebo Frobeniovu formu) v kroku 1 vede ke špatně podmíněným maticím  $U$  a  $V$  (viz [48]). Jestliže jsou však  $U$  a  $V$  ortogonální matice (tj.  $U^T U = I$ ) jsou jejich čísla podmíněnosti rovny jedné a relativní chybu vypočteného řešení můžeme očekávat malou. To je důvod, proč obě dále uvedené metody užívají pouze ortogonálních transformací.

### 11.2.1 Bartels–Stewartův algoritmus [46]

Jak již bylo uvedeno, Bartels–Stewartův algoritmus se skládá ze čtyř kroků. V kroku 1 je matice  $A$  transformována na dolní reálnou Schurovu formu  $A'$  ortogonální transformací  $U$ ; tj.  $A$  je redukována na dolní blokově trojúhelníkovou matici

$$A' = U^T A U = \begin{bmatrix} A'_{11} & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \\ A'_{p1} & \cdots & A'_{pp} \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

kde každý blok  $A'_{ii}$  je maximálně řádu 2. Podobně matice  $L$  je redukována na horní reálnou Schurovu formu  $L'$  ortogonální transformací  $V$

$$L' = V^T L V = \begin{bmatrix} L'_{11} & \cdots & L'_{1q} \\ & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & L'_{qq} \end{bmatrix}, \quad (11.16)$$

kde každý blok  $L'_{ii}$  je maximálně řádu 2. Jestliže nyní

$$R' = \begin{bmatrix} R'_{11} & \cdots & R'_{1q} \\ \vdots & & \\ R'_{p1} & \cdots & R'_{pq} \end{bmatrix}, \quad (11.17)$$

( $R'$  je matice získaná v kroku 2) a

$$X' = \begin{bmatrix} X'_{11} & \cdots & X'_{1q} \\ \vdots & & \\ X'_{p1} & \cdots & X'_{pq} \end{bmatrix}, \quad (11.18)$$

jsou matice rozdělené na bloky kompatibilně s rozdělením na bloky matic  $A'$  a  $L'$ , potom maticová rovnice v kroku 3 lze přepsat na

$$A'_{kk} X'_{kl} - X'_{kl} L'_{ll} + R'_{kl} + \sum_{j=1}^{k-1} A'_{kj} X'_{jl} - \sum_{i=1}^{l-1} X'_{ki} L'_{il} = 0 \quad (11.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, q).$$

Tyto rovnice mohou být řešeny postupně pro  $X'_{11}, X'_{21}, \dots, X'_{p1}, X'_{12}, X'_{22}, \dots$ . Řešení  $X$  maticové rovnice (11.13) je nakonec získáno v kroku 4, tj.  $X = UX'V^T$ .

Redukce  $A$  a  $L$  na reálnou Schurovu formu je provedeno standardní technikou; nejprve Householderovou metodou redukuje matici na Hessenbergovu formu a potom  $QR$  algoritmem na Schurovu formu. Programová realizace je detailněji popsána v [43].

### 11.2.2 Hessenberg–Schurův algoritmus [47]

Hessenberg–Schurův algoritmus spočívá v jednoduché modifikaci předchozího algoritmu. Jedna z matic  $A$  a  $L$ , řekněme  $A$ , není redukována na reálnou Schurovu formu, ale pouze na Hessenbergovu formu. Tím se ušetří určité množství operací jinak nutných k provedení iteračního  $QR$  algoritmu. Řešení maticové rovnice v kroku 3 je v důsledku toho trochu komplikovanější, ale celkově dojde k úspoře počtu operací. Zvláště výhodný je tento algoritmus v případě, že matice  $L$  má apriory Schurovu formu, potom časově náročný  $QR$  algoritmus je úplně eliminován.

### 11.2.3 Leverier–Faddějevův algoritmus

Dále uvedená nová metoda vychází ze vztahů (3.14) a (3.15) věty 3.5 dokázané v kapitole 3 a známého Leverier–Faddějevova algoritmu pro výpočet charakteristického polynomu matice (viz např. [45]). V tab. 11.1 a 11.2 jsou uvedena výpočtová schémata odpovídající po řadě vztahům (3.14) a (3.15) ve formě vhodné k ověření správnosti algoritmů. V obou případech, prvé tři sloupce tvoří Leverier–Faddějevův algoritmus, čtvrtý sloupec určuje  $p_A(L)$ , popřípadě  $q_L(A)$  Hornerovým algoritmem pro vyčíslení polynomů a pátý sloupec počítá  $-(R_n + p_1 R_{n-1}) + \dots + p_{n-1} R_1$  v prvním případě a  $-(R_s + q_1 R_{s-1}) + \dots + q_{s-1} R_1$  ve druhém případě (viz (3.14) a (3.15)). Dále jsou uvedeny algoritmy vhodné pro programovou realizaci těchto výpočtových schémat. Poznamenejme, že se nejedná o numericky stabilní algoritmy a může se tedy stát, že výsledky získané těmito algoritmy se dosti liší. Existence dvou algoritmů může být tedy s výhodou užita ke kontrole.

**Algoritmus 11.1** (viz tab. 11.1)

*Krok 1:*  $S = I_n, P = I_s, H = R, i = 1$

*Krok 2:*  $T = AS$

$$p_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr} T$$

$$S = T + p_i I_n$$

$$P = LP + p_i I_s$$

*Krok 3:* Jestliže  $i = n$  jdi na krok 4, jinak

$$H = HL + SR$$

$$i = i + 1$$

Tabulka 11.1: Výpočtové schéma podle vztahu (3.14) pro řešení maticové rovnice  $AX - XL + R = 0$   $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  Leverier–Faddějevovou metodou

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1 = A & p_1 = -\text{tr} T_1 & S_1 = T_1 + p_1 I & P_1 = L + p_1 I & H_1 = RL + S_1 R \\
 T_2 = AS_1 & p_2 = -\frac{1}{2} \text{tr} T_2 & S_2 = T_2 + p_2 I & P_2 = LP_1 + p_2 I & H_2 = H_1 L + S_2 R \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 T_n = AS_{n-1} & p_n = -\frac{1}{n} \text{tr} T_n & S_n = T_n + p_n I = 0 & P_n = LP_{n-1} + p_n I & H_{n-1} = H_{n-2} L + S_{n-1} R \\
 & & & & H_n = H_{n-1}
 \end{array}$$

$$X = H_n P_n^{-1}$$

je řešení maticové rovnice  $AX - XL + R = 0$

je charakteristický polynom matice  $A$

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

$$P_n = p_A(L)$$

$$H_n = -(R_n + p_1 R_{n-1} + \dots + p_{n-1} R_1)$$

Tabulka 11.2: Výpočtové schéma podle vztahu (3.15) pro řešení maticové rovnice  $AX - XL + R = 0$   $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{s \times s}$  Leverier–Faddějevovou metodou

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1 = L & q_1 = -\text{tr} T_1 & S_1 = T_1 + q_1 I & P_1 = A + q_1 I & H_1 = AR + RS_1 \\
 T_2 = LS_1 & q_2 = -\frac{1}{2} \text{tr} T_2 & S_2 = T_2 + q_2 I & P_2 = AP_1 + q_2 I & H_2 = AH_1 + RS_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 T_s = LS_{s-1} & q_s = -\frac{1}{s} \text{tr} T_s & S_s = T_s + q_s I = 0 & P_s = AP_{s-1} + q_s I & H_{s-1} = AH_{s-2} + RS_{s-1} \\
 & & & & H_s = H_{s-1}
 \end{array}$$

$$X = P_s^{-1} H_s$$

je řešení maticové rovnice  $AX - XL + R = 0$

je charakteristický polynom matice  $L$

$$q_L(\lambda) = \lambda^s + q_1 \lambda^{s-1} + \dots + q_s$$

$$P_s = q_L(A)$$

$$H_s = -(R_s + p_1 R_{s-1} + \dots + q_{s-1} R_1)$$



jdi na krok 2

*Krok 4:*  $X = HP^{-1}$

**Algoritmus 11.2** (viz tab. 11.2)

*Krok 1:*  $S = I_s, P = I_n, H = R, i = 1$

*Krok 2:*  $T = LS$

$$q_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr} T$$

$$S = T + q_i I$$

$$P = AP + q_i I$$

*Krok 3:* Jestliže  $i = s$  jdi na krok 4, jinak

$$H = AH + RS$$

$$i = i + 1$$

jdi na krok 2

*Krok 4:*  $X = -P^{-1}H$

### 11.3 Výpočet zpětné vazby

Uvedeme výpočtový postup realizující algoritmus 5.2. Modifikace tohoto postupu pro algoritmy uvedené v kapitolách 6, 8, 9 a 10 jsou jednoduché a jsou z důvodu stručnosti vypuštěny. Naším cílem je, aby výsledný program splňoval požadavky na kvalitní software. Z tohoto důvodu je sestaven z ověřených a spolehlivých stavebních kamenů - podprogramu AXPXB řešícího Sylvestrovu maticovou rovnici Bartels-Stewartovým algoritmem [46] a programu pro singulární dekompozici matice SVD ze známého EISPACKu [43]. Úloha přiřazení pólů je pro systémy vyššího řádu ( $n \geq 5$ ) často špatně podmíněná a proto je vhodné o případném výskytu této skutečnosti návrháře informovat. Příslušný výpočet čísel podmíněnosti je prováděn pomocí singulární dekompozice příslušné matice. Nyní uvedeme návrh numerické realizace algoritmu 5.2.

Program ve Fortranu 4 je uveden v dodatku A.

*Krok 1:* Vyber  $L$  v reálném Jordanově tvaru.

*Krok 2:* Urči číslo podmíněnosti  $K_2(P)$ <sup>7</sup> matice  $P = A \otimes I_s - I_n \otimes L^T$  pomocí podprogramu SVD. Jestliže  $K_2(P)$  je “velké” ve srovnání se strojovou přesností počítače, jdi na krok 1. (Pro zvolenou  $L$  není možné provést dostatečně přesný výpočet.)

*Krok 3:* Urči parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ .

*Krok 4:* Zvol hodnotu návrhového parametru  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ .

*Krok 5:* Nalezni řešení  $X(\alpha)$  maticové rovnice

$$AX - XL + BQ(\alpha) = 0$$

---

<sup>7</sup> $K_2(P) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ , kde  $\sigma_{max}, \sigma_{min}$  jsou po řadě maximální a minimální singulární hodnota matice  $P$ .

podprogramem AXPXB.

*Krok 6:* Urči číslo podmíněnosti  $K_2(X(\alpha))$  matice  $X(\alpha)$  pomocí podprogramu SVD. Jestliže  $K_2(X(\alpha))$  je “velké” ve srovnání se strojovou přesností počítače, jdi na krok 4 (popřípadě na krok 1), jinak urči efektivní pseudoinverzi matice  $X(\alpha)$  pomocí podprogramu SVD.

*Krok 7:* Vypočti  $F(\alpha) = Q(\alpha)X^+(\alpha)$ , kde  $X^+(\alpha)$  je efektivní pseudoinverze matice  $X(\alpha)$  určená v kroku 6.

Poznamenejme, že krok 2 je značně náročný na paměť počítače a v případě potřeby může být vypuštěn. Podobně výpočet čísla podmíněnosti v kroku 6 může být vynechán a výpočet efektivní pseudoinverze může být nahrazen obyčejnou inverzí. V takovémto případě však musíme počítat s občasným selháním algoritmu.

Pro malé osobní počítače se výše navržený postup pro svoji složitost nehodí. Jednoduše programovatelný algoritmus je pro tento případ uveden v dodatku B.

## 12 Praktické příklady

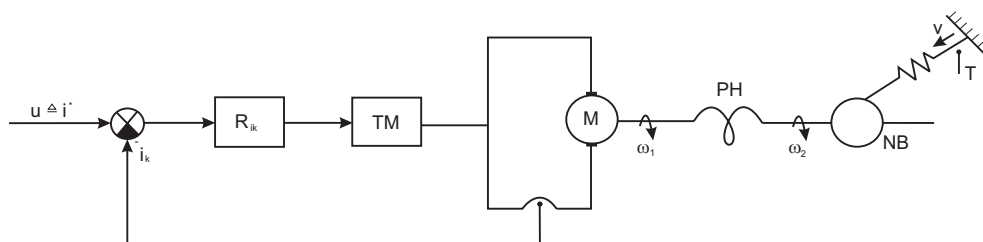
V této kapitole budeme na praktických příkladech ilustrovat využití některých dříve odvozených modálních algoritmů. Všechny uvedené výpočty byly provedeny pomocí dvou interaktivních programů pro modální řízení. Prvý s názvem MODCON je sestaven v jazyku FORTRAN 4 a byl implementován na počítači SM3 a SM4. Jádro tohoto programu tvoří podprogramy pro modální řízení (viz příloha A), podprogramy pro výpočet vlastních čísel matice (viz [43]) a podprogramy pro parametrickou optimalizaci (viz [55]). Podrobnější popis přesahuje rámec této práce. Druhý program je sestaven v jazyku BASIC a byl implementován na osobním počítači ZX81. Tento program posloužil k ověření jednoduše programovatelných algoritmů popsanych v kapitole 11 a v příloze B.

### 12.1 Přímá regulace výstupního tahu válcovaného pásu v případě desetiválcové stolice ŠKODA 2xC3-1200

Řízený elektromechanický systém (viz obr. 12.1) obsahuje: motor (M) s tyristorovým měničem (TM) a regulátorem proudu kotvy ( $R_{ik}$ ), pružný hřídel (PH), navíjecí buben se svitkem (NB), pružný pás (PP) a snímač tahu (ST). Jeho podrobný popis je uveden v [50]. Výsledný stavový model má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b_1 u + b_2 v \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (12.1)$$

kde  $x^T = [i_k, i_I, \Delta\varphi, \omega_1, \omega_2, T]$  a  $i_k$  je proud kotvy motoru (M),  $i_I$  je vnitřní stav PI regulátoru proudu kotvy ( $R_{ik}$ ),  $\Delta\varphi$  je úhel zakroucení hřídele (PH),  $\omega_1$  jsou otáčky motoru (M),  $\omega_2$  jsou otáčky navíjecího bubnu (NB) a  $T$  je tah ve válcovaném pásu (PP);  $u \triangleq i^*$  je vstup do regulátoru proudu kotvy a  $v$  je porucha v rychlosti páru vystupujícího ze stolice.



obr. 12.1

Matice  $A$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $C$  jsou ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} -484.325 & 337.5 & 0.0 & -14.4 & 0.0 & 0.0 \\ -142.857 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 100.0 & -100.0 & 0.0 \\ 57.065 & 0.0 & -135.863 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 396.056 & 0.0 & 0.0 & -47.5173 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 50.9336 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 448.876 \\ 142.857 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -83.84 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla matice  $A$  jsou:

$$-340.51; -0.202 \pm i 234.56; -144.33; -0.03673 \pm i 24.297.$$

Z polohy pólů je zřejmé, že systém je velmi kmitavý na dvou vlastních frekvencích - torzní kmity hřídele (37.33 Hz) a podélné kmity válcovaného pásu (3.87 Hz). Přechodové charakteristiky neřízeného systému jsou znázorněny na obr. 12.3. Cílem syntézy regulátoru tahu je odstranění nežádoucí kmitavosti neřízeného systému, dostatečně rychlá eliminace poruchy, nulová odchylka tahu od požadované hodnoty v ustáleném stavu a konečně jednoduchá struktura regulátoru. V dalším navrhne parametry  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$  regulátoru tahu pevné struktury znázorněného na obr. 12.2 tak, aby tyto cíle syntézy byly splněny.

Zformulovanou úlohu převedeme na úlohu částečného přiřazení pólů pomocí výstupní zpětné vazby pro systém

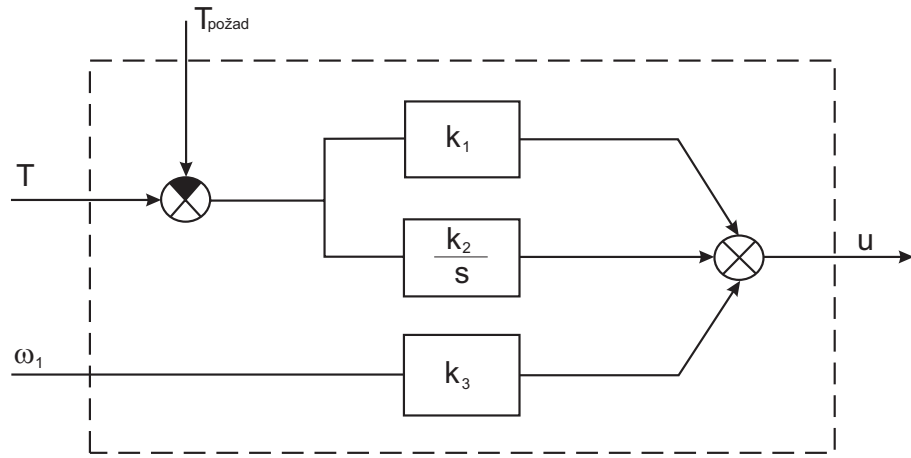
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}x, \end{aligned} \quad (12.2)$$

kde

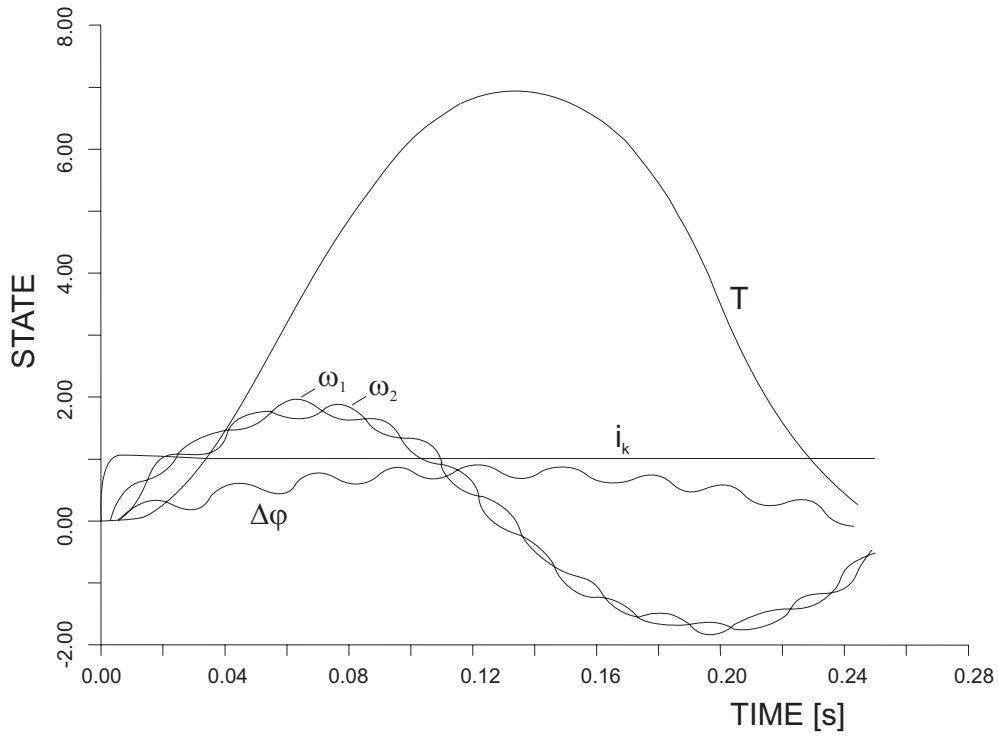
$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} & A & & & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \left[ \begin{array}{cccc|c} & C & & & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \end{array} \right].$$

(Systém (12.2) je systém (12.1) rozšířený o integrátor.)

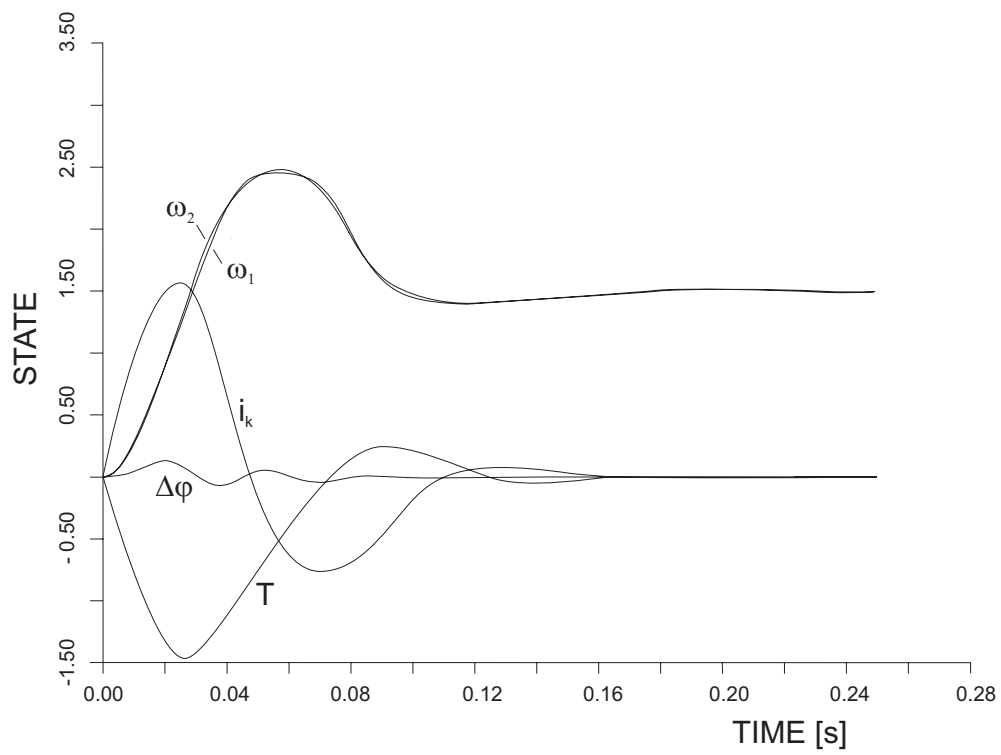
Výstupní zpětnou vazbou můžeme systému (12.2) přiřadit libovolným způsobem maximálně tři póly. (V programu MODCON mohou být tyto



obr. 12.2



obr. 12.3: odezva na jednotkový skok v řízení  $u$  (neřízený systém)



obr. 12.4 odezva na jednotkový skok v poruše  $v$  (řízený systém)

póly zvoleny přímo a nebo s pomocí optimalizačního procesu, který hledá takové rozložení pólů, aby byly splněny některé další podmínky na uzavřený systém.)

Zvolíme-li přiřazované póly následovně (viz doporučení v [56]):

$$-26.0 \pm i 53.4; -35.4$$

obdržíme

$$K = [k_3 \ k_1 \ k_2] = [-1.790 \ -1.898 \ -51.52]$$

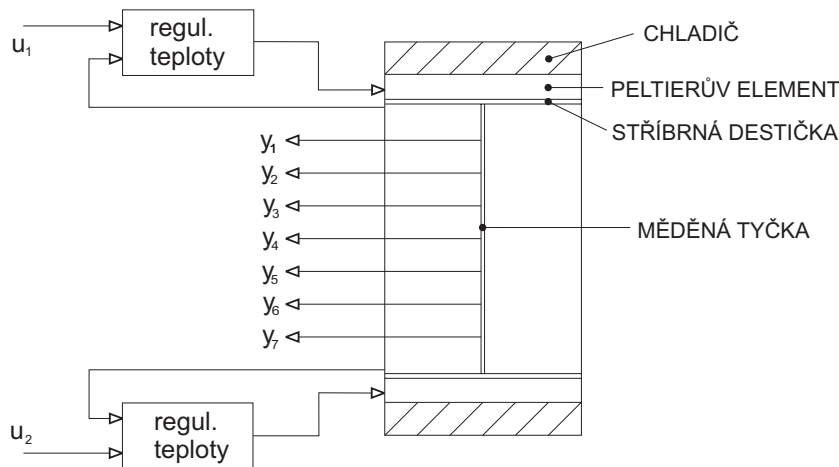
a póly uzavřeného systému jsou:

$$-20.46 \pm i 224.61; -178.01 \pm i 115.44; -26.0 \pm i 53.4; -35.4.$$

Přechodové charakteristiky uzavřeného systému jsou znázorněny na obr. 12.4.

## 12.2 Řízení teplotního procesu

Laboratorní teplotní proces [22] je znázorněn na obr. 12.5. (Stavový diskretní model tohoto procesu je často využíván v literatuře k testování algoritmů pro návrh diskretních regulátorů minimálního počtu kroků.)



obr. 12.5

Řízený systém se skládá z 45 cm dlouhé měděné tyčky s konstantním průřezem uložené v izolačním prostředí. Teploty na koncích tyčky jsou řízeny vstupy  $u_1$  a  $u_2$ . Podél tyčky je umístěno sedm snímačů teploty v ekvidistantních vzdálenostech - jejich údaje  $y_1, y_2, \dots, y_7$  tvoří měřitelný výstup systému. Proces může být popsán s dostatečnou přesností [22] stavovým

modelem ve tvaru

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & & & & & & & \\ b_2 & -b_1 & b_2 & -b_3 & & & & & \\ -b_3 & b_2 & -b_1 & b_2 & -b_3 & & & & \\ & -b_3 & b_2 & -b_1 & b_2 & -b_3 & & & \\ & & -b_3 & b_2 & -b_1 & b_2 & -b_3 & & \\ & & & -b_3 & b_2 & -b_1 & b_2 & -b_3 & \\ & & & & a_2 & -a_1 & & & \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ -b_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -b_3 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} u \quad (12.3)$$

$$a_1 = 0.732962 \cdot 10^{-1}$$

$$a_2 = 0.366301 \cdot 10^{-1}$$

$$b_1 = 0.916113 \cdot 10^{-1}$$

$$b_2 = 0.488402 \cdot 10^{-1}$$

$$b_3 = 0.305251 \cdot 10^{-2}$$

Pro tento systém navrhne diskretní stavový regulátor minimálního počtu kroků. Na rozdíl od [22] a [51] uvedeme všechna řešení této úlohy v parametrickém tvaru. Dominantní časová konstanta systému (12.3) je 176.14s. Periodu vzorkování zvolíme  $T = 60s$ . Pro příslušný diskretní systém

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

platí:

a) vlastní čísla matice  $A$  jsou:

$$0.71132$$

$$0.26349$$

$$0.057604$$

$$0.0089006$$

$$0.0010349$$

$$0.00010595$$

$$0.00001665$$

b)  $\mu(A, B) = \{4, 3\}$

Naším cílem je nalézt všechny stavové zpětné vazby  $F$  takové, že  $A + BF \approx L$ , kde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Parametrická matice  $Q(\alpha)$  příslušná k matici  $L$  má podle věty 7.1 tvar

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde  $\alpha \in \mathbf{R}$  je návrhový parametr. Užitím algoritmu 5.2 obdržíme (výsledky jsou zaokrouhleny na čtyři platné cifry):

1. pro  $\alpha = 0$

$$F_0 = \begin{bmatrix} -0.3648 & -0.5060 & -0.6072 & -0.5517 & -0.4058 & -0.2332 & -0.1168 \\ -0.1049 & -0.2122 & -0.3743 & -0.5161 & -0.5756 & -0.4850 & -0.3529 \end{bmatrix}$$

2. pro  $\alpha = -0.9$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.4619 & -0.6769 & -0.8636 & -0.8408 & -0.6622 & -0.4042 & -0.2140 \\ -0.002855 & -0.02265 & -0.08997 & -0.1955 & -0.2914 & -0.2955 & -0.2452 \end{bmatrix}$$

Podle důsledku 7.1 věty 7.2 lze každý prvek množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$F(\beta) = F_0 + \beta(F_1 - F_0).$$

Poznamenejme, že pro  $\beta = -0.0584091$  obdržíme “symetrickou” zpětnou vazbu  $F_2$  ve tvaru

$$F_2 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ g & f & e & d & c & b & a \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a &= -0.3592 \\ b &= -0.4961 \\ c &= -0.5923 \\ d &= -0.5348 \\ e &= -0.3908 \\ f &= -0.2232 \\ g &= -0.1112 \end{aligned}$$

### 12.3 Řízení navíjecího soustrojí

Stavové rovnice navíjecího soustrojí [53] jsou

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{12.4}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systém (12.4) je nestabilní; vlastní čísla matice  $A$  jsou  $-1.618$ ;  $0.618$ ;  $1.0$ ;  $-1.0$ . V [53] je navržena stavová zpětná vazba pro systém (12.4) přiřazující uzavřenému systému čtyřnásobný pól  $-5$ . V tomto příkladu ukážeme, že způsob výpočtu zpětné vazby použitý v [53] (omezující se pouze na zpětné vazby s hodnotí jedna) silně omezuje třídu možných řešení.

Nechť

$$L = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Parametrická matice  $Q(\alpha)$  příslušná k matici  $L$  má tvar

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}, \quad \alpha = [a, b, c, d]^T, \quad (12.6)$$

kde  $a, b, c, d$  jsou návrhové parametry (viz definice 5.2). V [53] jsou uvedeny<sup>8</sup> dvě zpětné vazby patřící do množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$ :

$$F_1 \triangleq F(\alpha_1) = \begin{bmatrix} -625.3 & 882.0 & 606.3 & -777.4 \\ -625.3 & 882.0 & 606.3 & -777.4 \end{bmatrix}$$

( $F_1$  získáme algoritmem 5.2 pro hodnotu návrhového parametru  $\alpha_1$ :  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ )

$$F_2 \triangleq F(\alpha_2) = \begin{bmatrix} -172.8 & 428.8 & 51.25 & -257.6 \\ -518.3 & 1286.3 & 153.8 & -772.8 \end{bmatrix}$$

( $F_2$  získáme algoritmem 5.2 pro hodnotu návrhového parametru  $\alpha_2$ :  $a = 3$ ,  $b = 3$ ,  $c = 3$ ,  $d = 3$ ).

Uřídíme další dvě zpětné vazby z  $\mathcal{F}(A, B, L)$ :

1. S pomocí algoritmu 5.2 a parametrické optimalizace určíme  $F_3 \triangleq F(\alpha_3) \in \mathcal{F}(A, B, L)$  tak, aby číslo podmíněnosti  $K_2(X(\alpha_3))$  modální matice  $X(\alpha_3)$  bylo minimální. (Tato podmínka vyjadřuje požadavek na robustnost stavové zpětné vazby [54]). Odstartujeme-li proces numerické optimalizace z počátečních hodnot  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ , obdržíme

$$F_3 \triangleq F(\alpha_3) = \begin{bmatrix} -4.056 & 24.33 & 0.4773 & 1.561 \\ 1.0 & -64.14 & -14.95 & -75.46 \end{bmatrix}$$

---

<sup>8</sup>V [53] je  $F_1$  uvedena chybně.

pro

$$a = 1.081; b = 24.07; c = -2.741; d = 8.047. \quad (12.7)$$

Příslušné číslo podmíněnosti  $K_2(X(\alpha_3)) = 669.2$ . Pro srovnání  $K_2(X(\alpha_1)) = 313\,078.0$  a  $K_2(X(\alpha_2)) = 249\,775.0$ .

2. Užitím algoritmu 5.2 a parametrické optimalizace určíme  $F_4 \triangleq F(\alpha_4) \in \mathcal{F}(A, B, L)$  tak, aby euklidovská norma  $\|F_4\|_E$  zpětné vazby  $F_4$  byla minimální.

(Tento požadavek vede většinou na prakticky použitelné zpětné vazby.)  
Odstartujeme-li proces numerické optimalizace z počátečních hodnot návrhových parametrů daných rovnostmi (12.7), obdržíme

$$F_4 \triangleq F_4(\alpha_4) = \begin{bmatrix} -7.428 & 39.54 & 1.169 & 3.087 \\ -5.655 & 0.03467 & -11.57 & -52.37 \end{bmatrix}$$

pro

$$a = 30.66; b = 38.67; c = 27.69; d = 21.07.$$

Příslušná norma  $\|F_4\|_E = 67.36$ . Pro srovnání  $\|F_1\|_E = 2069.2$ ;  
 $\|F_2\|_E = 1681.3$ ;  $\|F_3\|_E = 103.2$ .

## 13 Závěr

Syntézu lineárních zpětnovazebních obvodů metodou modálního řízení lze rozdělit do tří kroků:

1. Výběr struktury zpětné vazby (stavová, výstupní, dynamická, decentralizovaná atd.).
2. Výběr požadovaných spektrálních vlastností matice dynamiky uzavřeného systému.
3. Výpočet zpětné vazby.

Prvé dva kroky vyjadřují inženýrské požadavky návrháře transformované do požadavků na strukturu a na spektrální vlastnosti. V této transformaci je patrně hlavní úskalí syntézy metodou modálního řízení. Problém spočívá především ve vhodné<sup>9</sup> volbě spektrálních požadavků. Navzdory existenci celé řady prací na toto téma, zůstává zde mnoho otevřených otázek. Druhý vážný problém syntézy metodou modálního řízení spočívá v tom, že v obecném případě systému s více vstupy požadavky obsažené v 1 a 2 neurčují jednoznačně příslušnou zpětnou vazbu. Z celé množiny řešení je potom nutné vybrat tu zpětnou vazbu, která vyhovuje dodatečným podmínkám - například tu, jejíž některá norma je minimální, jejíž některé prvky jsou nulové a nebo tu, která minimalizuje některou jinou kriteriální funkci. Zdá se, že jediný způsob, jak tento výběr provést, je parametrická optimalizace. Její užití však vyžaduje popis všech řešení v parametrickém tvaru. Autorovy dříve známé metody řešící třetí krok syntézy, neumožňují explicitní a efektivní parametrizaci všech zpětných vazeb splňujících podmínky obsažené v 1 a 2. V práci jsou uvedeny algoritmy řešící dostatečně obecné úlohy modálního řízení a splňující výše zmíněné požadavky na parametrizaci. Základní a v jistém smyslu úplný je výsledek o parametrizaci množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  všech stavových zpětných vazeb přiřazujících matici dynamiky  $A + BF$  uzavřeného systému zadanou Jordanovu formu  $L$  pomocí minimálního počtu parametrů. Stejným přístupem jsou řešeny úlohy neúplného modálního přiřazení pomocí stavové výstupní a nebo dynamické zpětné vazby a úplného přiřazení pólů pomocí výstupní zpětné vazby. Zde však zůstávají, v případě výstupní zpětné vazby, některé otevřené problémy týkající se především úplnosti řešení. Zajímavý výsledek je dosažen v parametrizaci všech diskrétních stavových regulátorů minimálního počtu kroků. Zde obecně nelineární parametrizace množiny  $\mathcal{F}(A, B, L)$  může být nahrazena lineární. V práci je dále značná pozornost věnována numerickým aspektům navržených algoritmů a jsou uvedeny praktické příklady. V práci uvedené algoritmy jsou vhodné pro realizaci interaktivního programu pro návrh řídicích systémů metodou modálního řízení.

---

<sup>9</sup>Například vhodná volba pólů uzavřeného systému závisí často na fyzikální podstatě řízeného systému.

## Literatura

- [1] Andrejev, Jn. N.: *Algebraičeskije metody prostranstva sostajanij*. Avtomatika i telemekhanika 3, 1977, s. 5-50
- [2] Kalman, R. E., Falb, P., Arbib, M.A.: *Topics in mathematical system theory*. New York, Mc Graw-Hill, 1969.
- [3] Rissanen, J.: *Control system synthesis by analogue computer based on the "Generalized linear feedback" concept in Proceedings of the Symposium on analog computation*. Brussels, 1960, s. 1-13.
- [4] Popov, V. M.: *Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions*. Rev. Roumaine Sci. Tech. - Electrotechnol. Energ., vol. 9, 4, 1964, s. 629-690.
- [5] Luenberger, D. G.: *Observers for multivariable systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-11 (2), 1966, s. 190-197.
- [6] Wonham, W.M.: *On the pole assignment in multiinput controllable linear systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-12 (6), 1967, s. 660-665.
- [7] Brunovský, P.: *A classification of linear controllable systems*. Kybernetika 6 (3), 1970, s. 173-188.
- [8] Luenberger, D. G.: *Canonical forms for multivariable systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-12, 1967, s. 290-293.
- [9] Bass, R. W., Gura, I.: *High order systems design via state - space considerations*. Preprints 1965 JACC, N. Y. IEEE, 1965, s. 311-318.
- [10] Ackerman, J. E.: *Abtastregelung*. Berlin, Springer, 1972.
- [11] Rosenbrock, H. H.: *State - space and multivariable theory*. John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [12] Brash, F. M., Pearson, J. B.: *Pole placement using dynamic compensators*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-15 (1), 1970, s. 34-43.
- [13] Davison, E. J.: *On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-15 (3), 1970, s. 348-351.
- [14] Moore, B. C.: *On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-21, 1976, s. 689-692.
- [15] Klein, G., Moore, B. C.: *Eigenvalue - eigenvector assignment with state feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-22, 1977, s. 140-141.

- [16] Sebakhy, O. A., Sorial, N. N.: *Optimization of linear multivariable systems with prespecified closed-loop eigenvalues*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-24 (2), 1979, s. 355-357.
- [17] Wilems, J. C., Hesselink, W. H.: *Generic properties of the pole placement problem*. Preprints of the IFAC Word Congres, Helsinki, Finland, 1978.
- [18] Kimura, H.: *Pole assignment by gain output feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-20, 1975, s. 509-516.
- [19] Davison, E. J.: *On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-20, 1975, s. 516-518.
- [20] Topaloglu, Seborg, D. E.: *A design procedure for pole assignment using output feedback*. Int. J. Control, vol. 22 (6), 1975, s. 741-748.
- [21] Kučera, V.: *The structure properties of time optimal discrete linear control*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-16, 1971, s. 375-377.
- [22] Leden, B.: *Multivariable deadbeat control*. Automatika, vol.13, 1977, s. 185-188.
- [23] O'Reilly, J.: *The discrete linear time invariant time - optimal control problem - an overview*. Automatica, vol. 17 (2), 1981, s. 363-370.
- [24] Wang, S. H., Davison, E. J.: *On the stabilization of decentralized control systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-18, 1973, s. 473.
- [25] Cormat, J. P., Morse, A. S.: *Decentralised control of linear multivariable systems*. Automatica, (12), 1976, s. 479.
- [26] Sylvester, J. J.: *C. r. hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris*, 99, 1884, s. 527.
- [27] Gantmacher, F. R.: *Teorija matric*. Moskva, Nauka, 1967.
- [28] Kailath, T.: *Linear Systems*. Prentice - Hall, 1980.
- [29] Wonham, W. M.: *Linear Multivariable Control a geometric approach*. Springer - Verlag, 1974.
- [30] Luenberger, D. G.: *Observing the state of linear system*. Trans. Mil. Electron., Vol. MIL - 8, 1964, s. 74-80.
- [31] Fiedler, M.: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. Praha, SNTL, 1981.
- [32] Larin, V.: *Řešení maticnovu upravněníja*. Matěmaticeskaja fizika, 22, 1977, s. 12-14.

- [33] Dickinson, B. W.: *On the fundamental theorem of linear state variable feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-19, 1974, s. 577-579.
- [34] Flam, D. S.: *A new proof of Rosenbrock's theorem on pole assignment*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-25, 1980, s. 1128-1133.
- [35] Kučera, V.: *Assigning the invariant factors by feedback*. Kybernetika, 17, 1981, s. 118-127.
- [36] Schlegel, M.: *Parametrization of the class of deadbeat controllers*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-27, 1982, s. 727-729.
- [37] Sebakhly, O. A.: *A note on Parametrization of the class of deadbeat controllers*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-28, 1983, s. 1124-1126.
- [38] Fahmy, M. M., O'Reilly, J.: *Deadbeat control of linear discrete-time systems*. Int. J. Control, vol. 37, 1984, s. 685-705.
- [39] Davison, E. J., Chow, S. G.: *An algorithm for the assignment of closed-loop poles using output feedback in large linear multivariable systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-18, 1973, s. 74-75.
- [40] Seraji, H.: *A new method for pole placement using output feedback*. Int. J. Control, vol. 28 (1), 1978, s. 147-155.
- [41] Ahmari, R., Vacroux, A. G.: *On the pole assignment in linear systems with fixed order compensator*. Int. J. Control, vol. 17 (2), 1973, s. 397-404.
- [42] Forsythe, G. E., Moler, C. B.: *Computer solution of Linear Algebraic Systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice - Hall, 1967.
- [43] Smith, B. T. a kol: *Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide*. Springer - Verlag, 1974.
- [44] Cline, A. K., Moler, C. B., Stewart, G. W., Wilkinson, J. H.: *An estimate for the condition number of a matrix*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 16, 1979. s. 368-375.
- [45] Faddějev, D. K., Faddějevová, V. N.: *Numerické metody lineární algebry*. Praha, SNTL, 1964.
- [46] Bartels, R. H., Stewart, G. W.: *The solution of the equation  $AX+XB=C$* . Commun. ACM, vol. 15, 1972. s. 820-826.
- [47] Golub, G. H., Nash, S., Van Loan, C.: *A Hessenberg – Schur method for the problem  $AX-XB=C$* . IEEE Trans. Ant. Control, AC-24, 1979, s. 909-913.

- [48] Wilkinson, J. H.: *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford, England, Oxford Univ. Press, 1965.
- [49] Davison, E. J., Wang, S.: *Properties of linear time invariant multivariable systems subject to arbitrary output a state feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-18, 1973, s. 24-32.
- [50] Schlegel, M.: *Přímá regulace tahu*. Závěrečná práce postgraduálního studia "Elektronika a elektrické pohony", VŠSE Plzeň, 1981.
- [51] Jordan, D., Korn, J.: *Deadbeat algoritms for multivariable process control*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-25, 1980, s. 486-491.
- [52] Kimura, H.: *A new approach to the perfect regulation and the bounden peaking in linear multivariable control systems*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-26, 1981, s. 253-270.
- [53] Štecha, J., Kozáčík, J.: *Syntéza lineárních systému s předepsanou polohou kořenů uzavřeného obvodu*. Automatizace, č. 1, 1974. s. 10-16.
- [54] Kabamba, P. T., Longman, R. W.: *Exact pole assigument using direct or dynamic output feedback*. IEEE Trans. Ant. Control, AC-27, 1982, s. 1244-1246.
- [55] Himmelblau, D. M.: *Applied nonlinear programming*. Mc Graw-Hill Book Company, 1972.
- [56] Kuzovkov, N. T.: *Modalnoje upravlenuje i nabludajščije ustrojstva*. Moskva, Mašinostrajenije, 1976.



## A Příloha

FDBCK je podprogram v jazyku FORTRAN 4 realizující algoritmus 5.2 a jeho modifikace popsané v kapitolách 6 a 8. Numerická realizace algoritmu je podrobně popsána v kapitole 11. Zde je uveden úplný fortranský kód podprogramu.

## B Příloha

Algoritmy pro výpočet stavové zpětné vazby  $F$  přiřazující danou Jordanovu formu  $L$  matici dynamiky  $A + BF$  uzavřeného systému vhodné pro malé osobní počítače. Jsou uvedeny dva v jistém smyslu duální algoritmy. Předpokládáme  $A, L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ .

### Algoritmus 1 :

*Krok 1:* Zvol  $L$  v reálném Jordanově tvaru.

*Krok 2:* Urči parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ .

*Krok 3:* Zvol hodnotu návrhového parametru  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ .

*Krok 4:*  $S = I_n$ ,  $P = I_n$ ,  $R = H = BQ(\alpha)$ ,  $i = 1$

*Krok 5:*  $T = AS$

$$p_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr} T$$

$$S = T + p_i I$$

$$P = LP + p_i I$$

*Krok 6:* Jestliže  $i = n$  jdi na krok 7, jinak

$$H = HL + SR$$

$$i = i + 1$$

jdi na krok 5

*Krok 7:*  $F(\alpha) = Q(\alpha)PH^{-1}$

### Algoritmus 2 :

*Krok 1:* Zvol  $L$  v reálném Jordanově tvaru.

*Krok 2:* Urči parametrickou matici  $Q(\alpha)$  příslušnou k  $L$ .

*Krok 3:* Zvol hodnotu návrhového parametru  $\alpha \in \mathbf{R}^r$ .

*Krok 4:*  $S = I_n$ ,  $P = I_n$ ,  $R = H = BQ(\alpha)$ ,  $i = 1$

*Krok 5:*  $T = LS$

$$q_i = -\frac{1}{i} \operatorname{tr} T$$

$$S = T + q_i I$$

$$P = AP + q_i I$$

*Krok 6:* Jestliže  $i = n$  jdi na krok 7, jinak

$$H = AH + RS$$

$$i = i + 1$$

jdi na krok 5

*Krok 7:*  $F(\alpha) = -Q(\alpha)H^{-1}P$